

Практическое занятие №1

Тема: «Вычисление погрешностей результатов арифметических действий»

Цель: получение практических навыков вычисления погрешностей результатов арифметических действий

Предварительная подготовка: изучить материал Главы «Приближенные числа и действия над ними»(по конспекту) .

Количество часов: 2 часа

Оборудование: калькулятор.

Краткая теория

Приближенным числом a называется число, незначительно отличающееся от точного числа A и заменяющее последнее в вычислениях.

Абсолютная величина разности между точным числом A и его приближенным значением a называется абсолютной погрешностью приближенного числа a (Δa).

$$\Delta a = |A - a|$$

$$\text{Пример. } A = 784.2734; a = 784.274 \Rightarrow \Delta a = |784.2737 - 784.274| = 0.0003$$

Точное значение числа A часто бывает неизвестно, значит неизвестна абсолютная погрешность числа a , поэтому пользуются понятием границы абсолютной погрешности.

Граница абсолютной погрешности, то есть число заведомо превышающее абсолютную погрешность или в крайнем случае равное ей, называется предельной абсолютной погрешностью Δ_a^* .

$$\Delta_a = |A - a| \leq \Delta_a^*$$

Значение точного числа A всегда заключено в следующих границах $a - \Delta_a^* \leq A \leq a + \Delta_a^*$

Относительной погрешностью приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности Δ_a к модулю точного числа A .

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|} \Rightarrow \Delta_a = |A| \cdot \delta_a$$

Число δ_a^* , заведомо превышающее относительную погрешность или в крайнем случае равное ей, называется предельной относительной погрешностью (δ_a^*).

$$\delta_a \leq \delta_a^*$$

Пояснение к работе

Задание 1. Определить, какое равенство точнее $9/11 = 0,818$; $\sqrt{18} = 4,24$.

Решение.

Находим значения данных выражений с большим числом десятичных знаков:

$$A_1 = 9/11 = 0,81818\dots,$$

$$A_2 = \sqrt{18} = 4,2426\dots$$

Затем вычисляем предельные абсолютные погрешности, округляя их с избытком:

$$\Delta_{a_1} = |A_1 - a_1| = |0,81818 - 0,818| \leq 0,00019,$$

$$\Delta_{a_2} = |A_2 - a_2| = |4,2426 - 4,24| \leq 0,0027.$$

Предельные относительные погрешности составляют

$$\delta_{a_1} = \frac{\Delta_{a_1}}{a_1} = \frac{0,00019}{0,818} = 0,00024 = 0,024\%$$

$$\delta_{a_2} = \frac{\Delta_{a_2}}{a_2} = \frac{0,0027}{4,24} = 0,00064 = 0,064\%$$

Ответ: Так как $\delta_{a_1} < \delta_{a_2}$, то первое равенство $9/11 = 0,818$ является более точным.

Задание 2. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры

а) в узком смысле 0,4357;

б) в широком смысле 12,384.

Решение.

а) Так как все четыре цифры числа $a = 0,4357$ верны в узком смысле, то абсолютная погрешность вычисляется по формуле

$$\Delta_a^* = 0,5 \cdot 10^{m-n+1},$$

а относительная погрешность

$$\delta_a^* = \frac{0,5}{\alpha_1 \cdot 10^{n-1}},$$

где n - количество верных значащих цифр

m - старший десятичный разряд числа

α_i - цифра числа, причем $\alpha_1 \neq 0$

Значит, $\Delta_a^* = 0,5 \cdot 10^{-4} = 0,00005$; $\delta_a^* = 0,5 / (4 \cdot 10^{4-1}) = 0,000125 = 0,0125\%$.

б) Так как все пять цифр числа $a = 12,384$ верны в широком смысле, то абсолютная погрешность вычисляется по формуле

$$\Delta_a^* = 1 \cdot 10^{m-n+1},$$

а относительная погрешность

$$\delta_a^* = \frac{1}{\alpha_1 \cdot 10^{n-1}},$$

где n - количество верных значащих цифр

m - старший десятичный разряд числа

α_i - цифра числа, причем $\alpha_1 \neq 0$

Следовательно, $\Delta_a^* = 1 \cdot 10^{-3} = 0,001$; $\delta_a^* = 1 / (1 \cdot 10^{5-1}) = 0,0001 = 0,01\%$.

Ответ: а) $\Delta_a^* = 0,00005$; $\delta_a^* = 0,0125\%$.

б) $\Delta_a^* = 0,001$; $\delta_a^* = 0,01\%$.

Задания

- 1) Определить, какое равенство точнее.
- 2) Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: а) в узком смысле; б) в широком смысле.

№1.	1) $\sqrt{44} = 6,63$; $19/41 = 0,463$ 2) а) 0,2387; б) 42,884.	№2.	1) $7/15 = 0,467$; $\sqrt{30} = 5,48$; 2) а) 3,751; б) 0,537.
№3.	1) $\sqrt{10,5} = 3,24$; $4/17 = 0,235$ 2) а) 11,445; б) 2,043.	№4.	1) $15/7 = 2,14$; $\sqrt{10} = 3,16$; 2) а) 2,3445; б) 0,745.
№5.	1) $6/7 = 0,857$; $\sqrt{4,8} = 2,19$; 2) а) 8,345; б) 0,288.	№6.	1) $12/11 = 1,091$; $\sqrt{6,8} = 2,61$; 2) а) 12,45; б) 3,4453.
№7.	1) $15/7 = 2,14$; $\sqrt{10} = 3,16$; 2) а) 2,3445; б) 0,745.	№8.	1) $23/15 = 1,53$; $\sqrt{9,8} = 3,13$; 2) а) 20,43; б) 0,576.
№9.	1) $6/11 = 0,545$; $\sqrt{83} = 9,11$; 2) а) 41,72; б) 0,678.	№10.	1) $17/19 = 0,895$; $\sqrt{52} = 7,21$; 2) а) 5,634; б) 0,0748.
№11.	1) $21/29 = 0,723$; $\sqrt{44} = 6,63$; 2) а) 18,357; б) 2,16.	№12.	1) $50/19 = 2,63$; $\sqrt{27} = 5,19$; 2) а) 0,5746; б) 236,58.
№13.	1) $13/17 = 0,764$; $\sqrt{31} = 5,56$; 2) а) 14,862; б) 8,73.	№14.	1) $7/22 = 0,318$; $\sqrt{13} = 3,60$; 2) а) 0,3648; б) 36,5.
№15.	1) $17/11 = 1,545$; $\sqrt{18} = 4,24$; 2) а) 2,4516; б) 0,863.	№16.	1) $5/3 = 1,667$; $\sqrt{38} = 6,16$; 2) а) 62,74; б) 0,389.
№17.	1) $49/13 = 3,77$; $\sqrt{14} = 3,74$; 2) а) 5,6432; б) 0,00858.	№18.	1) $13/7 = 1,857$; $\sqrt{7} = 2,64$; 2) а) 0,0384; б) 63,745.
№19.	1) $19/12 = 1,58$; $\sqrt{12} = 3,46$; 2) а) 12,688; б) 4,636.	№20.	1) $51/11 = 4,64$; $\sqrt{35} = 5,91$; 2) а) 6,743; б) 0,543.
№21.	1) $18/7 = 2,57$; $\sqrt{22} = 4,69$; 2) а) 15,644; б) 6,125.	№22.	1) $19/9 = 2,11$; $\sqrt{17} = 4,12$; 2) а) 0,3825; б) 24,6.
№23.	1) $16/7 = 2,28$; $\sqrt{11} = 3,32$; 2) а) 16,383; б) 5,734.	№24.	1) $20/13 = 1,54$; $\sqrt{63} = 7,94$; 2) а) 0,573; б) 3,6761.
№25.	1) $12/7 = 1,71$; $\sqrt{47} = 6,86$; 2) а) 18,275; б) 0,00644.	№26.	1) $6/7 = 0,857$; $\sqrt{41} = 6,40$; 2) а) 3,425; б) 7,38.
№27.	1) $23/9 = 2,56$; $\sqrt{87} = 9,33$; 2) а) 3,75; б) 6,8343.	№28.	1) $27/31 = 0,872$; $\sqrt{42} = 6,48$; 2) а) 3,643; б) 72,385.
№29.	1) $7/3 = 2,33$; $\sqrt{58} = 7,61$; 2) а) 26,3; б) 4,8556.	№30.	1) $14/17 = 0,823$; $\sqrt{53} = 7,28$; 2) а) 43,813; б) 0,645.

Отчет должен содержать

1. Название, цель и задание работы.
2. Подробное решение задания.
3. Ответ, содержащий обоснование полученных результатов и выводов.

Контрольные вопросы

1. Что такое абсолютная и относительная погрешности?
2. Что такое предельная абсолютная и предельная относительная погрешности?
3. Чему равны погрешности суммы, разности, произведения, частного, степени и корня?
4. Какие вам известны правила подсчета цифр?