## Лекция № 9.

## Плоская система произвольно расположенных сил.

*Условия равновесия произвольной плоской системы сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Условие равновесия рычага.*

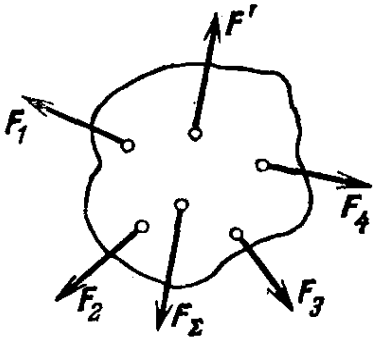
Для равновесия произвольной плоской системы сил не обходимо и достаточно, чтобы и главный вектор, и главный момент этой системы относительно любой точки плоскости действия сил равнялись нулю:

$$F_{гл} = 0 \text{ и } M_{гл} = \Sigma M_0(F_n) = 0$$

Из равенства $F_{гл} = 0$ следует, что геометрическая сумма всех сил, приложенных в центре приведения, равна нулю; поэтому согласно условию равновесия сходящихся сил силы эти взаимно уравновешиваются. Отсюда ясно, что для равновесия плоской системы сил достаточно соблюдения двух условий:

$$F_{гл} = \Sigma F_n = 0 \text{ и } M_{гл} = \Sigma M_0(F_n) = 0$$

Соблюдение обоих этих условий не только достаточно для равновесия, но и необходимо.




Пользуясь установленными выше условиями равновесия, нетрудно доказать теорему, носящую имя французского ученого Вариньона (1654-1722):

Если плоская система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любой точки плоскости действия сил равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

Следовательно, $\Sigma M_0 (F_n) + M_0(F') = 0$

Но так как силы $F'$ и $F_n$ равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны, то и их моменты относительно любой точки также равны по модулю и противоположны по знаку, т. е.

$$M_0 (F') = \Sigma M_0 (F_n)$$

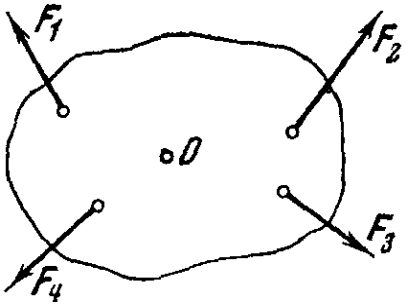
Теорема доказана.

Из теоремы Вариньона как следствие вытекает условие равновесия рычага:

Рычагом в широком смысле называется твердое тело, вращающееся около неподвижной оси и находящееся под действием сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной к этой оси.

Точка пересечения оси рычага с плоскостью действия называется точкой опоры.

Пусть на рычаг действует система сил лежащих в плоскости чертежа, и пусть О- точка опоры.




Для равновесия рычага достаточно, чтобы равнодействующая всех приложенных к нему сил, если она существует, проходила через точку опоры; в этот случае она уравновешивается реакцией опоры. Это условие является в то же время и необходимым условием равновесия рычага, так как если равнодействующая не пройдет через точку опоры О, то она сообщит рычагу вращение около этой точки. Но если равнодействующая проходит через точку опоры, то ее момент относительно этой точки равен нулю.

Если же главный вектор системы равен нулю и система, следовательно, приводится к паре сил, то для предотвращения вращения момент равнодействующей пары, равный сумме моментов данных сил относительно

любой точки, также должен равняться нулю. Отсюда ясно, что для равновесия рычага необходимо и достаточно, чтобы равнялась нулю алгебраическая сумма моментов всех приложенных к рычагу сил относительно точки его опоры.

*Различные формы уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.*

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю ее главный вектор и главный момент. Исходя из этого, можно установить для произвольной плоской системы сил уравнения равновесия в трех различных формах.

Первая (основная) форма уравнений. Из формул для модуля главного вектора и главного момента плоской системы сил

$F_{гл} = \sqrt{(\sum X_n)^2 + (\sum Y_n)^2}$ и $M_{гл} = \sum M_0(F_n)$

непосредственно следует, что $F_{гл}$ и $M_{гл}$ равны нулю в том случае, когда имеют место равенства

$\Sigma X_n = 0,$ $\Sigma Y_n = 0,$ $\Sigma M_0(F_n) = 0$

Следовательно, для равновесия плоской системы как угодно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей, лежащих в плоскости действия сил, и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки той же плоскости.

Вторая форма уравнений равновесия (теорема о трех моментах).

Для равновесия плоской системы как угодно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраические суммы моментов всех сил относительно трех любых, но не лежащих на одной прямой, точек плоскости действия сил:

$\Sigma M_A(F_n) = 0,$ $\Sigma M_B(F_n) = 0,$ $\Sigma M_C(F_n) = 0,$

Если точки A,B и C не лежат на одной прямой.

Система не может приводиться к паре, т.к. в этом случае главный момент системы относительно любой точки равен моменту пары и не может равняться нулю.

*Третья форма уравнений равновесия.*

Для равновесия плоской системы как угодно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраические суммы моментов всех сил относительно двух любых точек плоскости и сумма проекций всех сил на какую-либо одну ось, лежащую в той же плоскости, но не перпендикулярной к прямой, проходящей через выбранные центры моментов: $\Sigma M_A(F_n) = 0$, $\Sigma M_B(F_n) = 0$, $\Sigma X_n = 0$,

Если ось X не перпендикулярна к прямой AB.

**Задание для самостоятельной работы.**

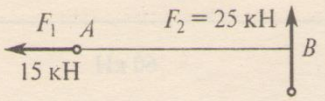
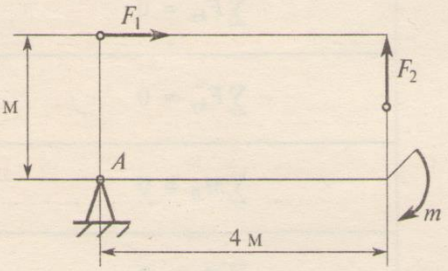
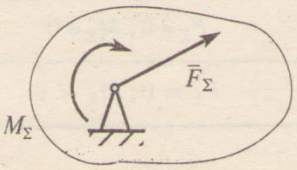
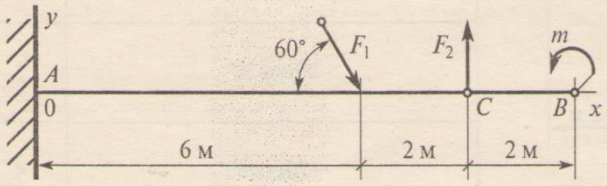
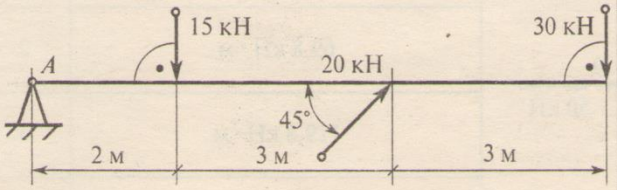
*Оформить конспект и выполнить тест*

**Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов – М.: Высшая школа, 2000. § 1.27-1.30**

# ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## *СТАТИКА*

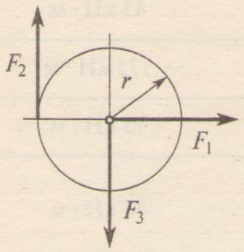
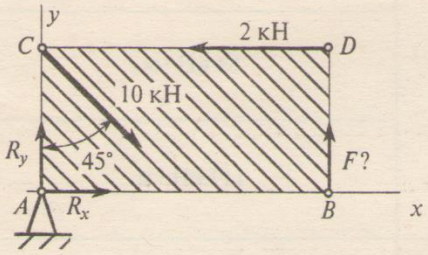
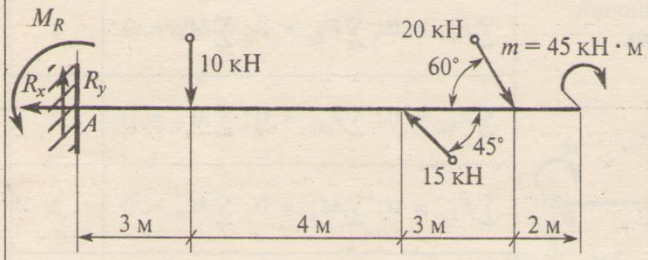
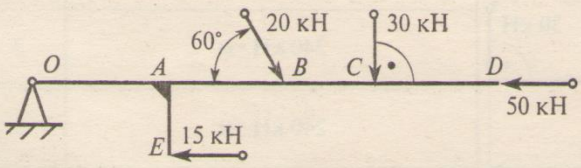
**Произвольная плоская система сил *1* (сосредоточенная нагрузка) Тема 1.4 Вариант 1**

| Вопросы | Ответы | Код |
|---|---|---|
| 1. Найти момент присоединенной пары при переносе силы $F_2$ в точку $A$   $AB = 3$ м | 25 кН · м | 1 |
| | 45 кН · м | 2 |
| | 175 кН · м | 3 |
| | 75 кН · м | 4 |
| 2. Определить величину главного момента при приведении системы сил к точке $A$ $F_1 = 36$ кН $F_2 = 18$ кН $m = 45$ кН · м   | 45 кН · м | 1 |
| | 72 кН · м | 2 |
| | 81 кН · м | 3 |
| | 117 кН · м | 4 |
| 3. Произвольная плоская система сил приведена к главному вектору $F_\Sigma$ и главному моменту $M_\Sigma$. Чему равна величина равнодействующей? $F_\Sigma = 105$ кН $M_\Sigma = 125$ кН · м   | 25 кН | 1 |
| | 105 кН | 2 |
| | 125 кН | 3 |
| | 230 кН | 4 |
| 4. Выбрать наиболее подходящую систему уравнений равновесия для определения реакций в опорах изображенной балки   | $\sum F_{kx} = 0;\ \sum F_{ky} = 0;\ \sum M_B = 0$ | 1 |
| | $\sum F_{kx} = 0;\ \sum F_{ky} = 0;\ \sum M_A = 0$ | 2 |
| | $\sum F_{kx} = 0;\ \sum M_A = 0;\ \sum M_B = 0$ | 3 |
| | $\sum M_A = 0;\ \sum F_{ky} = 0;\ \sum M_C = 0$ | 4 |
| 5. Рассчитать сумму моментов сил относительно точки $A$   | 70 кН · м | 1 |
| | 340 кН · м | 2 |
| | 240 кН · м | 3 |
| | 200 кН · м | 4 |

# ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## *СТАТИКА*

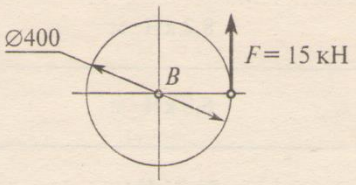
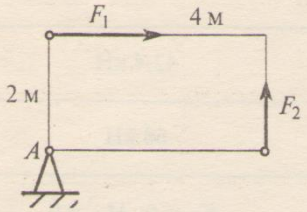
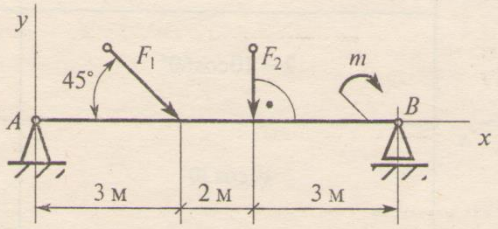
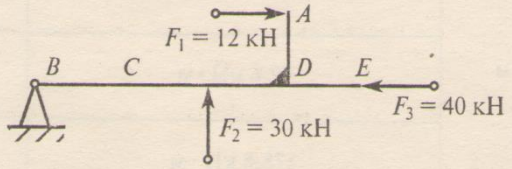
**Произвольная плоская система сил *1* (сосредоточенная нагрузка) Тема 1.4 Вариант 2**

| Вопросы | Ответы | Код |
|---|---|---|
| 1. Найти главный вектор системы сил, если $r = 2$ м; $F_1 = 60$ Н; $F_2 = 30$ Н; $F_3 = 30$ Н   | 30 кН | 1 |
| | 60 кН | 2 |
| | 90 кН | 3 |
| | 0 | 4 |
| 2. Какие уравнения равновесия целесообразно использовать для определения неизвестной силы?   | $\sum F_{kx} = 0$ | 1 |
| | $\sum F_{ky} = 0$ | 2 |
| | $\sum M_B = 0$ | 3 |
| | $\sum M_A = 0$ | 4 |
| 3. Тело движется равномерно прямолинейно, т.е. находится в равновесии. Чему равны главный вектор и главный момент? | $F_\Sigma = 0$; $M_\Sigma \neq 0$ | 1 |
| | $F_\Sigma \neq 0$; $M_\Sigma = 0$ | 2 |
| | $F_\Sigma \neq 0$; $M_\Sigma \neq 0$ | 3 |
| | $F_\Sigma = 0$; $M_\Sigma = 0$ | 4 |
| 4. Представлено уравнение для расчета реакции в опоре *A*. Какого члена уравнения не хватает?   $\sum F_y = R_y - 10 + 15\cos 45° ... = 0$ | m | 1 |
| | $20\cos 60°$ | 2 |
| | $20\cos 30°$ | 3 |
| | $-20\cos 30°$ | 4 |
| 5. Определить алгебраическую сумму моментов сил относительно точки *O*   $OA = AB = BC = CD = AE = 0{,}5$ м | 54,8 кН · м | 1 |
| | 69,8 кН · м | 2 |
| | 119,8 кН · м | 3 |
| | 127,3 кН · м | 4 |

# ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## *СТАТИКА*

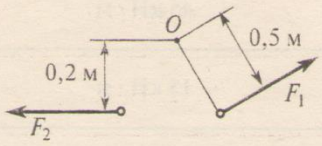
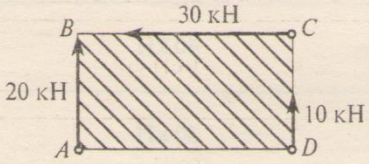
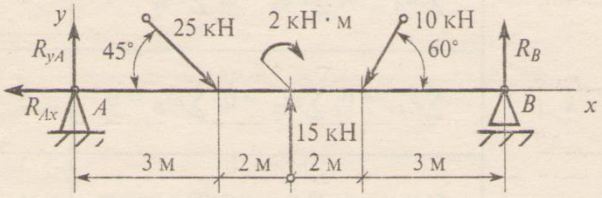
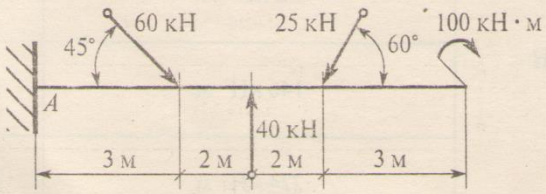
**Произвольная плоская система сил *1* (сосредоточенная нагрузка) Тема 1.4 Вариант 3**

| Вопросы | Ответы | Код |
|---|---|---|
| 1. Найти момент присоединенной пары при переносе силы $F$ в точку $B$   | 3 кН · м | 1 |
| | 45 кН · м | 2 |
| | 15 кН · м | 3 |
| | 6 кН · м | 4 |
| 2. Определить величину главного вектора при приведении системы сил к точке $A$<br>$F_1 = 40$ кН<br>$F_2 = 30$ кН   | 30 кН | 1 |
| | 40 кН | 2 |
| | 50 кН | 3 |
| | 60 кН | 4 |
| 3. Чем отличается главный вектор системы от равнодействующей той же системы сил?<br>*A.* Величиной<br>*B.* Направлением<br>*C.* Величиной и направлением<br>*D.* Точкой приложения | *A* | 1 |
| | *B* | 2 |
| | *C* | 3 |
| | *D* | 4 |
| 4. Выбрать наиболее подходящую систему уравнений равновесия для определения реакций в опорах изображенной балки   | $\sum m_A = 0;\ \sum m_B = 0;\ \sum m_C = 0$ | 1 |
| | $\sum m_A = 0;\ \sum F_{kx} = 0;\ \sum F_{ky} = 0$ | 2 |
| | $\sum F_{kx} = 0;\ \sum m_A = 0;\ \sum m_B = 0$ | 3 |
| | $\sum F_{kx} = 0;\ \sum F_{ky} = 0;\ \sum m_B = 0$ | 4 |
| 5. Определить алгебраическую сумму моментов сил относительно точки $B$   | 120 кН · м | 1 |
| | 96 кН · м | 2 |
| | 146 кН · м | 3 |
| $BC = 4$ м; $AD = DE = CD = 2$ м | 224 кН · м | 4 |

# ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## *СТАТИКА*

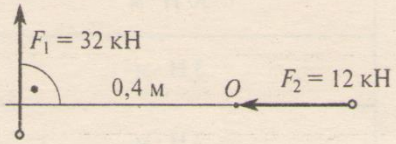
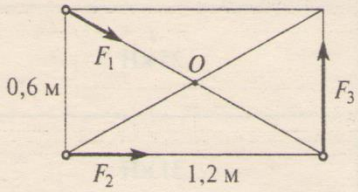
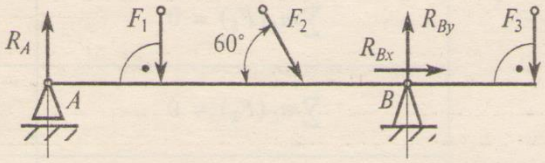
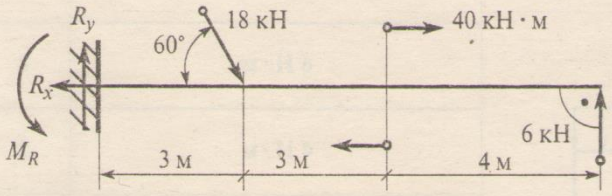
**Произвольная плоская система сил *1* (сосредоточенная нагрузка) Тема 1.4 Вариант 4**

| Вопросы | Ответы | Код |
|---|---|---|
| 1. Рассчитать момент присоединенной пары при переносе силы $F_1$ в точку $O$   $F_1$ =30 кН; $F_2$ = 42 кН | 15 кН · м | 1 |
| | 8,2 кН · м | 2 |
| | 6,8 кН · м | 3 |
| | 23,2 кН · м | 4 |
| 2. Чему равен главный вектор системы сил?   | 20,5 кН | 1 |
| | 30 кН | 2 |
| | 42,4 кН | 3 |
| | 60 кН | 4 |
| 3. Тело вращается вокруг неподвижной оси. Чему равны главный вектор и главный момент системы сил? | $F_\Sigma = 0$; $M_\Sigma = 0$ | 1 |
| | $F_\Sigma \neq 0$ ; $M_\Sigma = 0$ | 2 |
| | $F_\Sigma = 0$; $M_\Sigma \neq 0$ | 3 |
| | $F_\Sigma \neq 0$ ; $M_\Sigma \neq 0$ | 4 |
| 4. Представлено уравнение равновесия для расчета реакции в опоре $A$. Какого слагаемого в уравнении не хватает?   $\sum F_{kx} = -R_{Ax} + 25\cos 45° ... = 0$ | $2 + 10\cos 60°$ | 1 |
| | $2 - 10\cos 60°$ | 2 |
| | $10\cos 30°$ | 3 |
| | $-10\cos 60°$ | 4 |
| 5. Определить алгебраическую сумму моментов сил относительно точки $A$   | 0 | 1 |
| | 77,6 кН · м | 2 |
| | 178,8 кН · м | 3 |
| | 277,6 кН · м | 4 |

# ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## *СТАТИКА*

**Произвольная плоская система сил *1* (сосредоточенная нагрузка) Тема 1.4 Вариант 5**

| Вопросы | Ответы | Код |
|---|---|---|
| 1. Рассчитать момент присоединенной пары при переносе силы $F_1$ в точку $O$   | 4,8 кН · м | 1 |
| | 12,8 кН · м | 2 |
| | 12 кН · м | 3 |
| | 32 кН · м | 4 |
| 2. Рассчитать главный момент системы сил относительно точки $O$   $F_1$ = 15 кН<br>$F_2$ = 20 кН<br>$F_3$ = 25 кН | 9 кН · м | 1 |
| | 21 кН · м | 2 |
| | 46 кН · м | 3 |
| | 60 кН · м | 4 |
| 3. Что можно сказать о состоянии тела, если после приведения к некоторому центру системы сил, действующей на него, главный вектор и главный момент оказались равными нулю? | Тело движется прямолинейно | 1 |
| | Тело вращается | 2 |
| | Тело участвует в сложном движении | 3 |
| | Тело находится в равновесии | 4 |
| 4. Какое уравнение равновесия можно использовать, чтобы найти вертикальную составляющую реакции в опоре $B$?   | $\sum F_{kx} = 0$ | 1 |
| | $\sum F_{ky} = 0$ | 2 |
| | $\sum m_A = 0$ | 3 |
| | $\sum m_B = 0$ | 4 |
| 5. Найти момент в заделке $M_R$   | 20,2 кН · м | 1 |
| | 26,8 кН · м | 2 |
| | 66,8 кН · м | 3 |
| | 146,8 кН · м | 4 |