Лекция № 10.

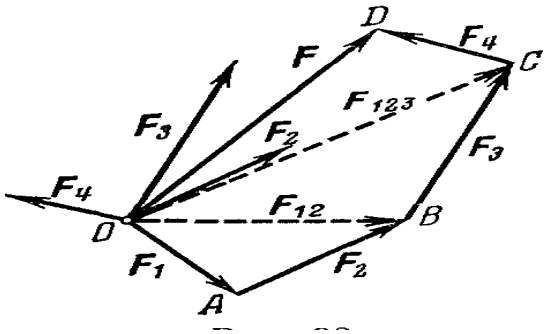
Плоская система произвольно расположенных сил.

Момент силы относительно точки. Условие равновесия.

Во многих случаях практики все силы, действующие на какие-либо сооружения или механизмы, приводятся к системе сил, лежащих в одной плоскости. Однако это имеет место далеко не всегда. Поэтому в статике приходится изучать приведение и равновесие систем сил, не лежащих в одной плоскости, так называемых пространственных систем сил.

Система нескольких сил, линии, действия которых не лежат в одной плоскости, но пересекаются в одной точке, называется, пространственной системой сходящихся сил.

Пусть в точке О приложено несколько сил, не лежащих в одной плоскости, например четыре силы $F_1;F_2;F_3;F_4$.



Для сложения двух каких-либо сил такой системы, например для сложения сил F_1 и F_2. мы можем применить правило сложения сходящихся сил на плоскости и найти их равнодействующую $F_{гл}$, приложенную в той же точке О. Проведя плоскость через эту равнодействующую и какую-либо третью силу F_3, мы можем найти по тому же правилу треугольника равнодействующую $F_{1,2,3}$ трех сил $F_1;F_2;F_3$ и т. д.

Равнодействующая пространственной системы сходящихся сил изображается по модулю и направлению замыкающей стороной многоугольника (OABCD), построенного на составляющих силах, т. е. является их геометрической суммой: $F_\Sigma = F_1+F_2+ F_3+F_4$ или $F_\Sigma = \Sigma F_n$

Необходимо иметь в виду, что силовой многоугольник, получающийся при сложении пространственной системы сил, не будет плоским. Неплоский многоугольник можно построить в действительности, например, из проволоки.

В частном случае равнодействующая пространственной системы трех сходящихся сил изобразится по модулю и направлению диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах. (Правило параллелепипеда сил.). Исходя из правила параллелепипеда, легко решить и обратную задачу — разложение силы по трем заданным направлениям, не лежащим в одной плоскости. Для этого, очевидно, достаточно построить параллелепипед, ребра которого имели бы заданные направления, а диагональю, которого являлась бы заданная сила.

В случае, если три заданных направления совпадают с направлениями осей координат, то составляющие OB, OC и OD силы F= OA соответственно равны по модулю абсолютным величинам проекций данной силы на оси пространственной системы координат.

OB = |OX| OC = |Y| OD = |Z| Откуда $F = \sqrt{X^2} + Y^2 + Z^2$

Модуль силы равен квадратному корню из суммы квадратов её проекций на три любые взаимно перпендикулярные оси.

Формулы определяющие направление равнодействующей

$\cos(F_\Sigma;X) = X_\Sigma / F_\Sigma$ $\cos(F_\Sigma;Y) = Y_\Sigma / F_\Sigma$ $\cos(F_\Sigma;Z) = Z_\Sigma / F_\Sigma$

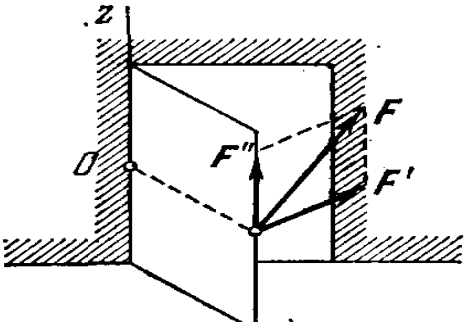
Для равновесия пространственной системы сходящихся вил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю суммы проекций всех сил на каждую из трех любых взаимно перпендикулярных осей.

Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно какой-либо оси называется величина, характеризующая вращательный эффект данной силы относительно этой оси.

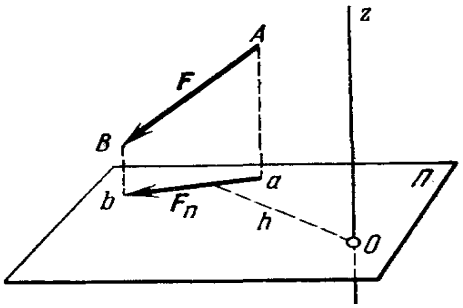
Начнем с конкретного примера.

Представим себе, что сила F, приложенная к телу, которое может вращаться вокруг неподвижной оси, например к двери, вращающейся на петлях вокруг оси, не лежит в плоскости, перпендикулярной к этой оси.



Ясно, что составляющая данной силы, параллельная оси вращения тела, не может сообщить ему вращательного движения; эта сила стремится только сдвинуть тело вдоль оси и вращательный эффект вызывает лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси вращения тела, составляющая F’ (являющаяся проекцией данной силы F на плоскость, перпендикулярную к оси вращения тела). Следовательно, мерой вращательного эффекта действия проекции к оси вращения, относительно точки данной плоскостью. Этот момент называется моментом силы F относительно оси.

Итак, момент силы относительно оси равен моменту проекции этой силы на перпендикулярную к данной оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.



Момент силы относительно оси вполне определяется своим численным значением и знаком и является, следовательно, скалярной алгебраической величиной.

Заметим, что: 1. момент силы относительно данной оси не изменяется при перенесении силы вдоль ее линии действия, так как при этом не изменяется ни проекция силы на данную плоскость, ни ее плечо;

2. момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы и ось лежат в одной плоскости.

При этом возможны два случая.

а) Сила параллельна оси. В этом случае равна нулю проекция силы на плоскость, перпендикулярную к оси.

б) Линия действия силы пересекает ось. Тогда проекция силы на плоскость проходит через точку пересечения оси с плоскостью, и ее плечо относительно этой точки равно нулю.

Условия равновесия системы сил, как угодно расположенных в пространстве.

Способ приведения сил к одному центру, вполне применим и для системы сил, как угодно в пространстве.

Согласно теореме Пуансо всякую силу можно перенести параллельно самой себе в любую точку тела, прибавляя при этом некоторую пару. Перенеся каждую из сил пространственной системы в одну какую-либо произвольную точку О (центр приведения), получим пространственную систему сходящихся в этой точке сил и систему пар, расположенных в различных плоскостях.

Силы, приложенные к одной точке О, можно сложить по правилу силового многоугольника и заменить одной эквивалентной им силой приложенной в той же точке О:

Так же как и для плоской системы сил, вектор $F_{гл}$, равный геометрической сумме всех данных сил пространственной системы, называется главным вектором этой системы.

Модуль этой силы можно вычислить по формуле, установленной ранее для модуля равнодействующей пространственной системы сходящихся сил:

$$F = \sqrt{\sum X_n^2} + \sum Y_n^2 + \sum Z_n^2$$

Существуют способы сложения пар, расположенных как угодно в пространстве. Пользуясь определенными правилами, можно найти не только

модуль результирующей пары, но и плоскость, в которой будет расположена данная пара, и направление вращения пары в этой плоскости.

Для равновесия системы сил, расположенных как угодно в пространстве, необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю как главный вектор системы, так и ее главный момент, относительно произвольно выбранного центра приведения.

Этим условиям можно придать и более удобную для практических целей аналитическую форму.

$$\left.\begin{array}{lll} \Sigma X_n = 0 & \Sigma Y_n = 0 & \Sigma Z_n = 0 \\ \Sigma M_x(F_n) = 0 & \Sigma M_y(F_n) = 0 & \Sigma M_z(F_n) = 0 \end{array}\right\}$$

Для равновесия системы сил, расположенных как угодно в пространстве, необходимо и достаточно, чтобы порознь равнялись нулю суммы проекций всех сил на каждую из трех произвольно выбранных, но не лежащих в одной плоскости координатных осей, и суммы моментов всех сил относительно каждой аз трех таких осей.

Уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил

Для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраическая сумма всех сил и суммы моментов всех сил относительно каждой аз двух осей, лежащих в плоскости, перпендикулярной к данным параллельным силам.

Задание для самостоятельной работы.

Изучив материал оформить конспект и выполнить тесты.

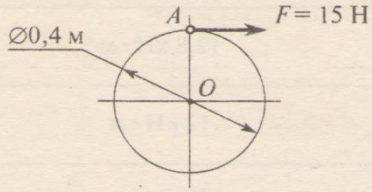
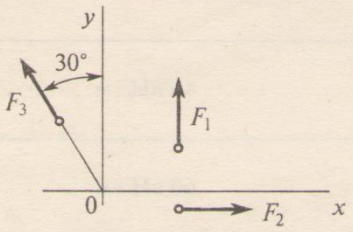
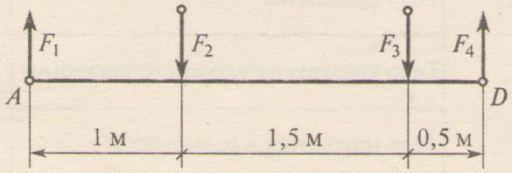
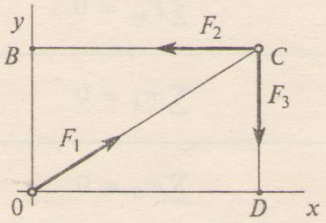
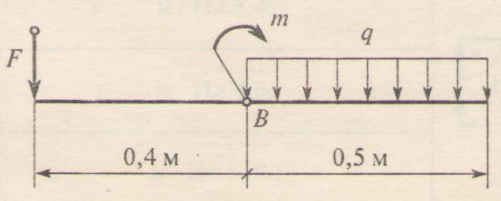
Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов – М.: Высшая школа, 2000. § 1.31-1.35

Олофинская В.П. Техническая механика: Сборник тестовых заданий. – М., Форум- Инфра-М, 2002.

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

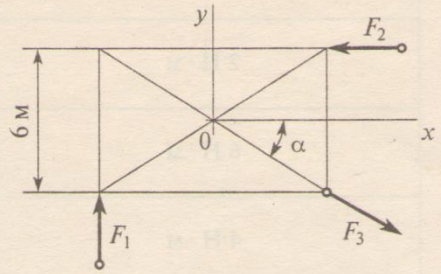
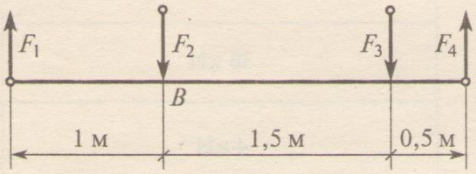
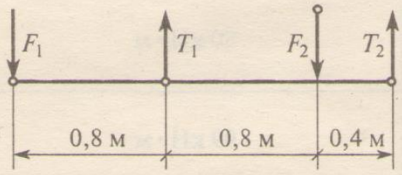
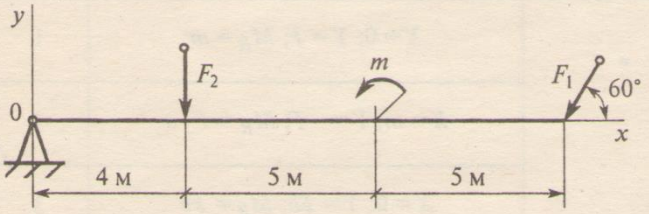
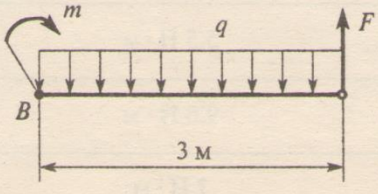
Произвольная плоская система сил 2 **Тема 1.4** **Вариант 1**

Вопросы	Ответы	Код
1. Найти момент присоединенной пары при переносе силы F в точку O 	15 Н · м	1
	30 Н · м	2
	3 Н · м	3
	2 Н · м	4
2. Для заданной плоской системы произвольно расположенных сил определить величину главного вектора $F_1 = 8$ кН $F_2 = 20$ кН $F_3 = 16$ кН 	22 кН	1
	25 кН	2
	31 кН	3
	20,1 кН	4
3. Найти главный момент системы, если центр приведения находится в точке D $F_1 = 2$ Н; $F_2 = 4$ Н; $F_3 = 6$ Н; $F_4 = 4$ Н 	17 Н · м	1
	11 Н · м	2
	15 Н · м	3
	5 Н · м	4
4. Какое еще уравнение равновесия надо составить, чтобы убедиться, что система сил уравновешена? $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$ 	$\sum m_O(F_k) = 0$	1
	$\sum m_B(F_k) = 0$	2
	$\sum m_C(F_k) = 0$	3
	Достаточно заданных уравнений	4
5. Определить алгебраическую сумму моментов относительно точки B $F = 10$ Н; $m = 9$ Н · м; $q = 8$ Н/м 	14 Н · м	1
	6 Н · м	2
	4 Н · м	3
	16 Н · м	4

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

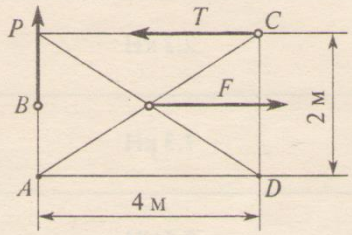
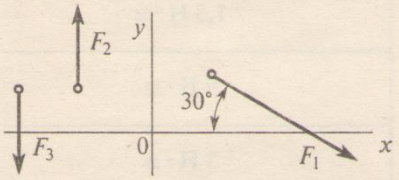
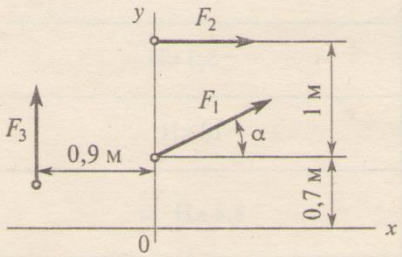
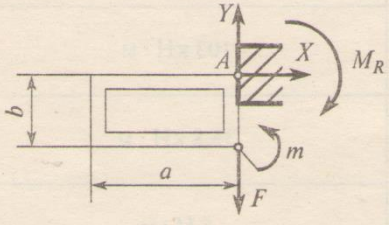
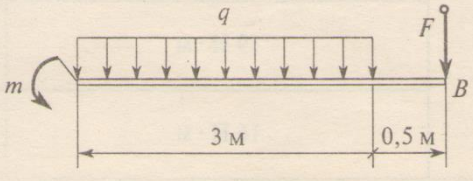
Произвольная плоская система сил 2 **Тема 1.4** **Вариант 2**

Вопросы	Ответы	Код
1. Найти главный вектор системы сил $F_1 = 3$ Н; $F_2 = 4$ Н; $F_3 = 10$ Н; $\alpha = 30°$ 	5 кН	1
	2,2 кН	2
	7,3 кН	3
	2,5 кН	4
2. Найти главный момент системы, если центр приведения находится в точке B $F_1 = 2$ Н; $F_2 = 4$ Н; $F_3 = 6$ Н; $F_4 = 4$ Н 	7,3 Н · м	1
	1,3 Н · м	2
	9 Н · м	3
	3 Н · м	4
3. К брусу приложена уравновешенная система сил, две из которых неизвестны. $F_1 = 10$ кН; $F_2 = 5$ кН. Найти T_2 	−7,3 кН	1
	5 кН	2
	−3,3 кН	3
	10 кН	4
4. Определить алгебраическую сумму моментов сил относительно точки 0 $F_1 = 6$ кН; $F_2 = 6$ кН; $m = 40$ кН · м 	8,8 кН · м	1
	56,7 кН · м	2
	103 кН · м	3
	33,8 кН · м	4
5. Найти $\sum m_B(F_k)$ $m = 2$ Н · м $q = 2$ Н/м $F = 2$ Н 	5 Н · м	1
	10 Н · м	2
	19 Н · м	3
	16 Н · м	4

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

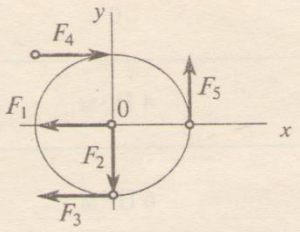
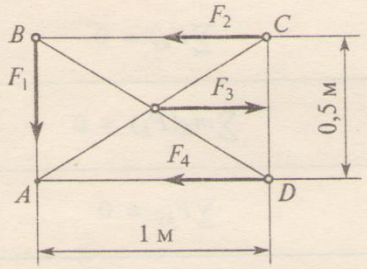
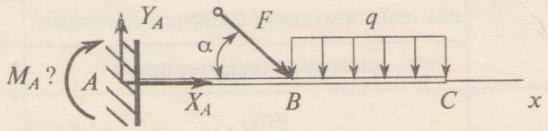
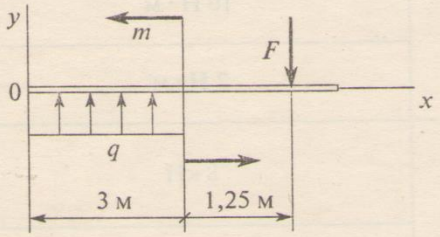
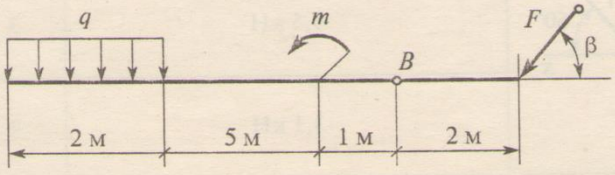
Произвольная плоская система сил *2* **Тема 1.4** **Вариант 3**

Вопросы	Ответы	Код
1. Чему будет равен момент присоединенной пары, если силы перенести в точку A? $P = 2$ Н; $F = 6$ Н; $T = 4$ Н 	16 Н · м	1
	2 Н · м	2
	6 Н · м	3
	4 Н · м	4
2. Для заданной плоской системы произвольно расположенных сил определить величину главного вектора $F_1 = 30$ кН; $F_2 = 10$ кН; $F_3 = 20$ кН 	29 кН	1
	33,5 кН	2
	36 кН	3
	4 кН	4
3. Для заданной плоской системы произвольно расположенных сил определить величину главного момента относительно 0 $F_1 = 20$ кН; $F_2 = 30$ кН; $F_3 = 40$ кН; $\alpha = 30°$ 	94 кН · м	1
	80 кН · м	2
	99 кН · м	3
	75 кН · м	4
4. Определить реакции в заделке A. В точке A закреплена прямоугольная рама 	$X = 0$; $Y = F$; $M_R = m$	1
	$X = m$; $Y = -F$; $M_R = F \cdot a$	2
	$X = 0$; $Y = Fb$; $M_R = Fb$	3
	$X = F$; $Y = 0$; $M_R = F(a + b)$	4
5. Определить алгебраическую сумму моментов сил относительно точки B $m = 1$ Н · м; $q = 1$ Н/м; $F = 5$ Н 	17 Н · м	1
	5,5 Н · м	2
	9,5 Н · м	3
	7 Н · м	4

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

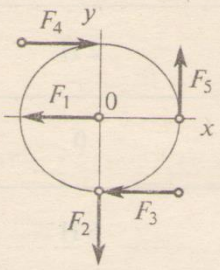
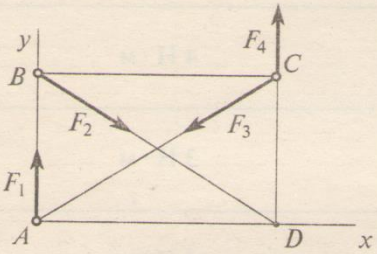
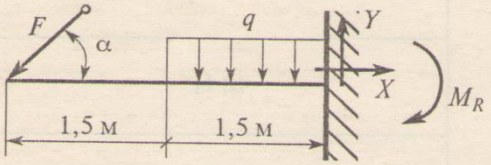
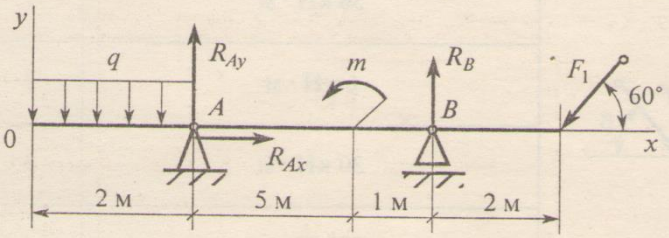
Произвольная плоская система сил *2* **Тема 1.4** **Вариант 4**

Вопросы	Ответы	Код
1. Найти главный вектор системы сил, если $F_1 = 6$ Н; $F_2 = 2$ Н; $F_3 = 3$ Н; $F_4 = 9$ Н; $F_5 = 2$ Н. Круг $\varnothing = 1$ м 	8 Н	1
	2 Н	2
	0	3
	6 Н	4
2. Определить алгебраическую сумму моментов системы сил относительно точки B $F_1 = 5$ Н; $F_2 = 4$ Н; $F_3 = 16$ Н; $F_4 = 6$ Н 	11 Н · м	1
	4 Н · м	2
	3 Н · м	3
	1 Н · м	4
3. Каким уравнением равновесия следует воспользоваться, чтобы сразу найти M_A, зная F, q, α. 	$\sum F_{kx} = 0$	1
	$\sum F_{ky} = 0$	2
	$\sum m_A(F_k) = 0$	3
	$\sum m_C(F_k) = 0$	4
4. Определить алгебраическую сумму проекций сил на ось $0y$ $F = 6$ Н $m = 5$ Н · м $q = 3$ Н/м 	6 Н	1
	10 Н	2
	1 Н	3
	3 Н	4
5. Определить алгебраическую сумму моментов сил относительно точки B $F = 3$ кН; $m = 8$ кН · м; $q = 2$ кН/м; $\beta = 30°$ 	36 кН · м	1
	6 кН · м	2
	30 кН · м	3
	33 кН · м	4

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

Произвольная плоская система сил 2 **Тема 1.4** **Вариант 5**

Вопросы	Ответы	Код
1. Найти главный момент системы относительно точки O $F_1 = 6$ Н; $F_2 = 2$ Н; $F_3 = 2$ Н; $F_4 = 8$ Н; $F_5 = 2$ Н Круг $\varnothing = 1$ м 	14 Н · м	1
	0	2
	4 Н · м	3
	6 Н · м	4
2. Какое одно уравнение равновесия надо использовать, чтобы найти F_1, если известны силы F_2, F_3, F_4? 	$\sum m_A(F_k) = 0$	1
	$\sum F_{kx} = 0$	2
	$\sum m_B(F_k) = 0$	3
	$\sum F_{ky} = 0$	4
3. Что можно сказать о плоской системе сил, если при приведении ее к некоторому центру главный вектор и главный момент оказались равными нулю?	система не уравновешена	1
	система заменена равнодействующей	2
	система заменена главным вектором	3
	система уравновешена	4
4. Найти момент в заделке M_R $F = 2$ Н $q = 8$ Н/м $\alpha = 30°$ 	13 Н · м	1
	12 Н · м	2
	10 Н · м	3
	7 Н · м	4
5. Определить вертикальную составляющую реакции в опоре A $F_1 = 10$ кН $m = 8$ кН · м $q = 2$ кН/м 	8 кН	1
	7,6 кН	2
	9,5 кН	3
	3,1 кН	4