Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Байконурский электрорадиотехнический техникум имени М.И. Неделина»
(ГБ ПОУ «БЭРТТ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
по учебной работе
____________М.М. Иванова
«21» февраля 2022г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ И ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине «Математика:алгебра, начало математического анализа, геометрия »
Курс:1
Специальности: 08.02.09 «Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий»
09.02.03 «Программирование в компьютерных системах»

Одобрена предметно-цикловой комиссией
общеобразовательных, социально-
экономических и гуманитарных дисциплин

Председатель

_____________ С.Б.Сатенова
«17»__02__________________2022 г.

Методист

_____________ С.Б.Сатенова
«17»__02______________2022 г.

Составитель _______________ В.В.Юрьев

Пояснительная записка

Всесторонняя подготовка специалистов – это не только приобретение знаний, но и выработка умений применять знания на практике и в жизни. Особенно важными являются умения по специальностям. Однако специалист был бы беспомощным в отрасли своей деятельности, если бы не знал практики, или иными словами, не видел путей практического приложения научных знаний, не обладал собственными умениями и навыками.

Целями привития умений и навыков служат практические занятия.

Задачами практических занятий являются:

- расширение, углубление и детализация научных знаний, полученных на лекциях. Практические занятия логически продолжают лекции;
- повышение уровня усвоения учебного материала;
- привитие умений и навыков;
- развитие научного мышления и речи студентов;
- проверка и учет знаний. Все формы практических занятий являются важным средством более действенной проверкой знаний, оперативной обратной связи, осуществляемой по формуле «студент-преподаватель»;
- развитие научного кругозора и общей культуры;
- развитие познавательной активности;
- привитие навыков ведения коллективной беседы, участие в творческой дискуссии.

Все эти задачи должны быть направлены на достижение конечной цели – всестороннего развития личности будущего специалиста.

Методические рекомендации для выполнения практических занятий

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение ситуативных задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения ситуативных задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении поставленных задач нужно обосновывать каждый этап действий, исходя из теоретических положений курса. Если обучающийся видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала решения поставленных задач составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками, инструкциями по выполнению.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный результат следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи.

Подготовка к практическим занятиям

Основой для подготовки студентов ко всем видам практических занятий являются разрабатываемые планы занятий. В них перечисляются вопросы для изучения, приводится перечень основной и дополнительной литературы, а также называются методические пособия, призванные оказывать помощь студентам в организации самостоятельной работы по данной теме.

Успех каждого практического занятия зависит от того, насколько активно и самостоятельно в нем участвуют студенты. Однако характер их участия в различных видах самостоятельных занятий различен. Он зависит от специфики самих занятий.

Одним из видов практических занятий, являются практические работы. Практические работы проводятся для формирования умений и навыков и направлены на обучение конкретной деятельности. В ходе практических работ студенты овладевают умениями работать с нормативными документами, справочниками, составляют чертежи, схемы, таблицы, техническую документацию и решают задачи (в соответствии с содержанием общеобразовательных общепрофессиональных и специальных дисциплин).

К каждой практической работе разрабатываются инструкции. Инструкции содержат методические рекомендации, а также конкретные практические задания. Расчеты студенты проводят по вариантам, что обеспечивает их самостоятельность в работе и позволяет преподавателю выявлять отстающих, проводить с ними индивидуальную работу.

Преподаватель осуществляет контроль за работой каждого студента, помогает тем из них, кто в этом нуждается, дает индивидуальные консультации.

В результате самостоятельного поэтапного решения предложенных заданий, студенты получают достаточно полное представление о практическом использовании изученного лекционного материала.

Практические работы студенты оформляют в отдельных тетрадях, пастой синего цвета.

Критерии оценивания практических работ

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
86-100	5	отлично
66-85	4	хорошо
50-65	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

При оценке знаний, умений и навыков обучающихся следует учитывать все ошибки (грубые и негрубые) и недочеты.

Классификация ошибок

Грубыми считаются ошибки:

- незнание определения основных понятий, законов, правил, основных положений теории, незнание формул, общепринятых символов обозначений величин, единиц их измерения;
- незнание наименований единиц измерения;
- неумение выделить в ответе главное;
- неумение применять знания, алгоритмы для решения задач;
- неумение делать выводы и обобщения;
- неумение читать и строить графики;
- неумение пользоваться первоисточниками, учебником и справочниками;
- потеря корня или сохранение постороннего корня;
- отбрасывание без объяснений одного из них;
- равнозначные им ошибки;
- вычислительные ошибки, если они не являются опиской;
- логические ошибки.

К **негрубым ошибкам** следует отнести:

- неточность формулировок, определений, понятий, теорий, вызванная неполнотой охвата основных признаков определяемого понятия или заменой одного — двух из этих признаков второстепенными;
- неточность графика;
- нерациональный метод решения задачи или недостаточно продуманный план ответа (нарушение логики, подмена отдельных основных вопросов второстепенными);
- нерациональные методы работы со справочной и другой литературой;
- неумение решать задачи, выполнять задания в общем виде.

Недочетами являются:

- нерациональные приемы вычислений и преобразований;
- небрежное выполнение записей, чертежей, схем, графиков.

Выделенные требования, за какие умения можно ставить определенную оценку и четкое представление, что считается грубой ошибкой, а что недочетом, позволят преподавателю грамотно оценить студента.

Практическая работа № 1

Тема: Уравнения и неравенства.

Цель: Отработать навыки преобразования выражений, используя формулы сокращенного умножения, разложения многочлена на множители, а также навыки решения уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств.

Методические рекомендации

Решение квадратных уравнений:

$\boldsymbol{a \cdot x^2 + bx + c = 0}$

$\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$,

Если $D > 0,$ то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

Если $D = 0,$ то $x = \dfrac{-b}{2a}$

Если $D < 0,$ то корней нет

Формулы сокращенного умножения:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1. Сократите дробь: а) $\dfrac{x^2-4}{x+2}$; б) $\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$

2. Упростите выражение: $\dfrac{x^2-4x}{y}\cdot\dfrac{2xy}{x^2-16}$

3. Решите уравнения:

а) $2x-3=5-2x$; б) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{3x-2}{4}=3$

4. Решите систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-y=3 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$

5. Решите уравнения:

а) $x^2-2x-1=0$; б) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}=4$

6. Решите неравенство: $2x-3\le 3-x$

7. Решите систему неравенств:

$\begin{cases} 2x+2\le x+4 \\ x+5\ge 2x-1 \end{cases}$

8. Решите неравенство: $x^2-5x+4\ge 0$

2 вариант

1. Сократите дробь: а) $\dfrac{x^2-9}{x-3}$; б) $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$

2. Упростите выражение: $\dfrac{x^2-x}{2y}\cdot\dfrac{y}{x-1}$

3. Решите уравнения:

а) $2x+1=3-x$; б) $\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{x+1}{2}=2$

4. Решите систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x+2y=4 \\ x-y=3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+\frac{1}{3}y=1 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

5. Решите уравнения:

а) $x^2+x-4=0$; б) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{x}=5$

6. Решите неравенство: $2x+1\ge x-2$

7. решите систему неравенств:

$\begin{cases} x-1\le 3x+2 \\ 2x-4\le x \end{cases}$

8. Решите неравенство: $x^2+2x-3\le 0$

3 вариант

1. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2-4}{x-2}$; б) $\frac{x^2+6x+9}{x+3}$

2. Упростите выражение:

$\frac{x^3-1}{y^2-4}\cdot\frac{y+2}{x^2+x+1}$

3. Решите уравнения:

а) $x-4=2-3x$; б) $\frac{x-1}{3}-\frac{x}{4}=1$

4. Решите систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases}2x-y=2\\ x-2y=1\end{cases}$; б) $\begin{cases}\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=2\\ x-y=3\end{cases}$

5. Решите уравнения:

а) $x^2-x-1=0$; б) $\frac{x}{5}+\frac{1}{x}=4$

6. Решите неравенство: $x-1<3x+1$

7. Решите систему неравенств:

$\begin{cases}x+1\le 2x-1\\ x+3\ge 3x-2\end{cases}$

8. Решите неравенство: $x^2-x-2>0$

4 вариант

1. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2-16}{x+4}$; б) $\frac{x^2-4x+4}{x-2}$

2. Упростите выражение: $\frac{xy^2}{x^2-1}\div\frac{2xy}{x-1}$

3. Решите уравнения:

а) $2x+5=5-x$; б) $\frac{x}{2}+\frac{3x-2}{5}=4$

4. Решите систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases}3x+y=0\\ 2x-y=5\end{cases}$; б) $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2\\ 2x+\frac{y}{4}=1\end{cases}$

5. Решите уравнения:

а) $x^2+2x-4=0$; б) $\frac{x}{3}-\frac{2}{x}=1$

6. Решите неравенство: $2x+2>x-3$

7. Решите систему неравенств:

$\begin{cases}2x+4<x-1\\ x>3x-5\end{cases}$

8. Решите неравенство: $2x^2-x-1<0$

Практическая работа № 2

Тема: Показательные уравнения, неравенства, системы уравнений.
Цель: Отработать навыки решения показательных уравнений, неравенств, систем уравнений.

Методические рекомендации

1. Показательные уравнения.

Определение. Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным.

1. $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$ - простейшее показательное уравнение
2. $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a \neq 1$, $a > 0$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$
3. $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0$ решается подстановкой $a^x = y$ и сводится к квадратному уравнению $Ay^2 + By + C = 0$

II. Показательные неравенства.

Определение. Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным.

$$a^{f(x)} < a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1.$$

При $\underline{a > 1}$

$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно $f(x) < g(x)$

при $\underline{0 < a < 1}$

$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно $f(x) > g(x)$

III. Основные показательные тождества.

2. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$
3. $a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1 - x_2}$
4. $\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 x_2}$
5. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

6. если $a > 0$, $a \neq 1$ и $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$
7. если $a > 1$ и $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$
8. если $0 < a < 1$ и $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$
9. если $a < b$ и $x > 0$, то $a^x < b^x$
10. если $a < b$ и $x < 0$, то $a^x > b^x$

$a^0 = 1$; $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; $\quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Варианты заданий контрольной работы

Работа состоит из двух частей. Выполнение первой части работы (до черты) позволяет получить оценку «3». Для получения оценки «4» необходимо верно решить первую часть работы и одну из задач второй части (за чертой). Чтобы получить оценку «5», помимо выполнения первой части работы, необходимо решить не менее двух любых заданий из второй части.

1 вариант

1. Решить уравнение:

а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-3x}=25$; б) $4^x+2^x-20=0$

2. Решить неравенство: $\left(\frac{3}{4}\right)^x>1\frac{1}{3}$

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x-y=4 \\ 5^{x+y}=25 \end{cases}$$

---

4. Решить неравенство:

а) $\left(\sqrt{5}\right)^{x-6}<\frac{1}{5}$; б) $\left(\frac{2}{13}\right)^{x^2-1}\ge 1$

5. Решить уравнение:

$7^{x+1}+3\cdot 7^x=2^{x+5}+3\cdot 2^x$

6. Решите уравнение:

$4\cdot 5^{2x}+5\cdot 4^{2x}=9\cdot 20^x$. В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

2 вариант

1. Решите уравнение:

а) $(0{,}1)^{2x-3}=10$; б) $9^x-7\cdot 3^x-18=0$

2. Решите неравенство: $\left(\frac{6}{5}\right)^x>\frac{5}{6}$

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ 6^{x+5y}=36 \end{cases}$$

---

4. Решить неравенство:

а) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{x+6}>\frac{1}{9}$; б) $\left(1\frac{2}{7}\right)^{x^2-4}\le 1$

5. Решить уравнение:

$3^{x+3}+3^x=5\cdot 2^{x+4}-17\cdot 2^x$

6. Решите уравнение:

$3\cdot 2^{2x}+2\cdot 3^{2x}=5\cdot 6^x$. В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

3 вариант

1. Решить уравнение:

а) $2^{1-x}=8$; б) $25^x-5^x=20$

2. Решить неравенство: $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{9}{4}$

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 4^x+4^y=5 \end{cases}$$

---

4. Решить неравенство:

а) $\left(\sqrt{2}\right)^{x+2}<\frac{1}{8}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-9}\ge 1$

5. Решить уравнение: $5^{2x}-4^{x+1}=4^x+5^{2x-1}$

6. Решите уравнение:

$3\cdot 4^x+2\cdot 25^x-7\cdot 10^x=0$. В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

4 вариант

1. Решить уравнение:

а) $8^x=4^{x-1}$; б) $49^x-6\cdot 7^x-7=0$

2. Решить неравенство: $\left(\frac{1}{64}\right)^x\ge\sqrt{\frac{1}{8}}$

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 4^{x+2y-1}=1 \end{cases}$$

---

4. Решить неравенство:

а) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{x-3}>\frac{1}{49}$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-5}\le 1$

5. Решить уравнение: $4^x+3^{x-1}=4^{x-1}+3^{x+2}$

6. Решите уравнение:

$5\cdot 5^{2x}-13\cdot 5^x\cdot 3^x+6\cdot 3^{2x}=0$. В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

Практическая работа № 3

Тема: Логарифмические уравнения, неравенства, системы уравнений.
Цель: Отработать навыки решения логарифмических уравнений, неравенств и систем уравнений.

Методические рекомендации

I. Свойства логарифмов.

1. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a x} = x$
2. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
3. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
4. $\log_a x^n = n \log_a x$
5. $\log_a a = 1$
6. $\log_a 1 = 0$
7. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
8. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ - формула перехода к другому основанию
9. $\log_{a^n} x = \dfrac{1}{n}\log_a x$

II. Логарифмические уравнения.

<u>Определение.</u> Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим. $\log_a x = b$, $a > 1$, $a \neq 1$. – простейшее логарифмическое уравнение.

Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно системе: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

<u>Методы решения.</u>

1. Полученные корни подставляют в исходное уравнение для исключения посторонних корней.
2. При решении уравнений полезен метод введения новой переменной.
3. При решении уравнений, содержащих переменную и в основании, и в показателе степени, используется метод логарифмирования.

<u>Примеры.</u>

1. $\log_{\sqrt[3]{4}}(x-1) = 6$

$x - 1 > 0$, $x > 1$

По определению логарифма:

$x - 1 = \left(\sqrt[3]{4}\right)^6$

2. $\log_x 5\sqrt{5} - 1{,}25 = \log_x^2 \sqrt{5}$

$\log_x 5^{\frac{3}{2}} - \dfrac{5}{4} = \log_x^2 5^{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{3}{2}\log_x 5 - \dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{4}\log_x^2 5$

$x-1=4^2$

$x=17$

Ответ: 17.

$\frac{1}{4}\log_x^2 5-\frac{3}{2}\log_x 5+\frac{5}{4}=0$

$\log_x^2 5-6\log_x 5+5=0$

Пусть $\log_x 5=y$, тогда

$y^2-6y+5=0$

$D=36-20=16$

$y_1=1$ или $y_2=5$

$\log_x 5=1$ или $\log_x 5=5$

$x^1=5$ или $x^5=5$

$x=5$ или $x=\sqrt[5]{5}$

Ответ: 5; $\sqrt[5]{5}$.

III. Логарифмические неравенства.

Определение. Неравенство, содержащее переменную только под знаком логарифма, называется логарифмическим неравенством.

$$\log_a f(x)>\log_a g(x)$$

при $\underline{a>1}$, данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x)>g(x) \\ f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$

при $\underline{0<a<1}$, данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x)<g(x) \\ f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$

Примеры.

1. $\log_3(x+2)>4$

$\log_3(x+2)>\log_3 3^4$, т.к. $a=3>1$, то переходим к системе неравенств:

$\begin{cases} x+2>81, \\ x+2>0, \end{cases}$ $\begin{cases} x>81-2, \\ x>-2, \end{cases}$ $\begin{cases} x>79 \\ x>-2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x>79$, т.е. $x\in(79;+\infty)$

Варианты заданий контрольной работы

1 вариант

А1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения:
$\log_3(3-2x)=3$

1) $(-\infty;-11)$; 2) $(-12;-1)$; 3) $(-10;10)$; 4) $(11;+\infty)$

А2. Найдите произведение корней уравнения: $\lg(x^2-x)=1-\lg 5$

1) 2; 2) 25; 3) 50; 4) -2

А3. Решите неравенство:
$\log_2(2x+1)>\log_2(x-1)$

2 вариант

А1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения:
$\log_6(5x-5)=2$

1) $(-8;8)$; 2) $(7;9)$; 3) $(9;11)$; 4) $(10;+\infty)$

А2. Найдите произведение корней уравнения: $\log_6(2x^2-x)=1-\log_6 2$

1) 3; 2) -1; 3) $-1{,}5$; 4) -3

А3. Решить неравенство:
$\log_3(5x-1)<\log_3(4x+3)$

1) $(1;+\infty)$; 2) $(2;+\infty)$; 3) $(-2;+\infty)$; 4) $(-0{,}5;+\infty)$

А4. Решите неравенство: $\log_{0,3}(x-7)<0$

1) $(7;8)$; 2) $(-\infty;7)\cup(8;+\infty)$; 3) $(8;+\infty)$; 4) $(-\infty;7)$

В1. Решите уравнение: $\log_5 x^3-6=0$

В2. Решите уравнение: $\log_4^2 x-3\log_4 x=3^{\log_3 4}$. В ответе укажите наименьший из корней данного уравнения.

В3. Найдите наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству: $\log_{\sqrt{3}}(x-5)-\log_3(x-5)<4$

С1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ \log_{12} x=1-\log_{12} y \end{cases}$$

1) $(-\infty;4)$; 2) $(-0{,}75;4)$; 3) $(0{,}2;4)$; 4) $(4;+\infty)$

А4. Решить неравенство: $\log_{0,1}(x-3)>0$

1) $(3;4)$; 2) $(-\infty;4)$; 3) $(4;+\infty)$; 4) $(3;+\infty)$

В1. Решите уравнение: $\log_4 x^5+5=0$

В2. Решите уравнение: $\log_3{}^2 x-\log_3 x=4^{\log_4 6}$. В ответе укажите наибольший из корней данного уравнения.

В3. Найдите наименьшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству: $\log_{\sqrt{5}}(4-x)+\log_{0,2}(4-x)<1$

С1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ \log_2 y=3-\log_2 x \end{cases}$$

3 вариант

А1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения: $\log_{\frac{1}{2}}(3x-5)=-2$

1) $(2;+\infty)$; 2) $(4;+\infty)$; 3) $(0;2)$; 4) $(-3;-1)$

А2. Найдите произведение корней уравнения: $\lg(x-2)=1-\lg(x+2)$

1) 6; 2) 14; 3) -6; 4) $\sqrt{14}$

А3. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x)\ge\log_{\frac{1}{3}}(1-x)$

1) $(2;+\infty)$; 2) $[2;+\infty)$; 3) $(1;2)$; 4) нет реш.

А4. Решите неравенство: $\log_{0,8}(3-5x)\ge 0$

1) $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$; 2) $[0{,}4;0{,}6)$; 3) $(0{,}4;0{,}6]$; 4) $[0{,}4;0{,}6]$

В1. Решите уравнение: $\log_2 x^4-4=0$

В2. Решите уравнение: $\log_3{}^2 x-\log_3 x=5^{\log_5 2}$. В ответе укажите наименьший корень данного уравнения

В3. Найдите наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству: $\log_{\sqrt{2}}(x-3)-\log_2(x-3)<1$

С1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ \log_7 y=1-\log_7 x \end{cases}$$

4 вариант

А1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения: $\log_{\frac{1}{5}}(2x-3)=-1$

1) $(-1;2)$; 2) $(3{,}5;5)$; 3) $(2;3{,}5)$; 4) $(-4;-2)$

А2. Найдите произведение корней уравнения: $\lg(x+3)=1-\lg(x-3)$

1) $\sqrt{19}$; 2) 19 ; 3) -2 ; 4) 1

А3. Решите неравенство: $\log_2(2x-1)\le\log_2(3x+4)$

1) $(-\infty;-5]$; 2) $[-5;+\infty)$; 3) $[0{,}5;+\infty)$; 4) $(0{,}5;+\infty)$

А4. Решите неравенство: $\log_{0,2}(2-5x)\ge 0$

1) $[0{,}2;0{,}4)$; 2) $(0{,}2;0.4)$; 3) $(0{,}2;0{,}4]$; 4) $[0{,}2;0.4]$

В1. Решите уравнение: $\log_4 x^3+3=0$

В2. Решите уравнение: $\log_{0,2}{}^2 x-\log_{0,2} x=4^{\log_4 6}$. В ответе укажите наибольший корень данного уравнения.

В3. Найдите наименьшее целое значение, удовлетворяющее неравенству: $\log_{\sqrt{4}}(1-x)-\log_4(1-x)<1$

С1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ \log_5 x=1-\log_5 y \end{cases}$$

Практическая работа № 4

Тема: Тригонометрические формулы.
Цель: Отработать навыки работы с тригонометрическими формулами.

Методические рекомендации

I. Основные тригонометрические тождества.

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$; $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
2. $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = tgx \cdot \cos x$
3. $ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cos x = ctgx \cdot \sin x$
4. $tgx \cdot ctgx = 1 \Rightarrow tgx = \dfrac{1}{ctgx}$ и $ctgx = \dfrac{1}{tgx}$
5. $1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
6. $1 + ctg^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

II. Формулы сложения.

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
5. $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$
6. $tg(\alpha - \beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}$

III. Формулы двойного и половинного аргументов.

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
3. $tg 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$
4. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$
5. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$
6. $tg\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$

IV. Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций.

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$
2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$
3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

5. $tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

Варианты заданий контрольной работы

1 вариант

1. Найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} + 2tg\frac{\pi}{4}$;

б) $\sin 315^\circ\cdot\cos 225^\circ + ctg 210^\circ\cdot tg 300^\circ$

2. Вычислите:

а) $\frac{\cos 120^\circ\cdot\cos 50^\circ + \sin 120^\circ\cdot\sin 50^\circ}{\cos 25^\circ\cdot\cos 45^\circ - \sin 25^\circ\cdot\sin 45^\circ}$;

б) $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$

3. Упростите выражения:

а)

$2\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) + tg(\pi-\alpha)\cdot ctg(2\pi+\alpha$

б) $\frac{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}$; в) $\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

4. Доказать тождество:

$\frac{ctg\alpha}{tg\alpha + ctg\alpha} = \cos^2\alpha$

2 вариант

1. Найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} + 3tg\frac{\pi}{3}$;

б) $\cos 210^\circ\cdot\sin 300^\circ + ctg 45^\circ\cdot tg 225^\circ$

2. Вычислите:

а) $\frac{\sin 5^\circ\cdot\cos 25^\circ + \cos 5^\circ\cdot\sin 25^\circ}{\cos 80^\circ\cdot\cos 50^\circ + \sin 80^\circ\cdot\sin 50^\circ}$;

б) $2\cos\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{8}$

3. Упростите выражения:

а)

$2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi+\alpha) + tg(\pi+\alpha)\cdot ctg(2\pi-\alpha$

б) $\frac{\cos 3\alpha - \cos\alpha}{\sin 3\alpha + \sin\alpha}$; в) $\frac{1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}$

4. Доказать тождество:

$\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \sin\alpha$

3 вариант

1. Найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\cdot tg\frac{\pi}{4}$;

б) $\sin 225^\circ\cdot\cos 300^\circ + tg 45^\circ\cdot ctg 135^\circ$

2. Вычислите:

а) $\frac{\cos 18^\circ\cdot\cos 12^\circ - \sin 18^\circ\cdot\sin 12^\circ}{\sin 23^\circ\cdot\cos 7^\circ + \cos 23^\circ\cdot\sin 7^\circ}$;

б) $\frac{2tg 15^\circ}{1-tg^2 15^\circ}$

3. Упростите выражения:

а) $tg\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

б) $\frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos 3\alpha - \cos\alpha}$; в) $\frac{tg\alpha}{tg\alpha + ctg\alpha}$

4. Доказать тождество:

$\frac{tg\alpha}{tg\alpha + ctg\alpha} = \sin^2\alpha$

4 вариант

1. Найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\pi - \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$;

б) $\cos 135^\circ\cdot\sin 210^\circ + ctg 300^\circ\cdot tg 315^\circ$

2. Вычислите:

а) $\frac{\sin 35^\circ\cdot\cos 5^\circ - \cos 35^\circ\cdot\sin 5^\circ}{\cos 20^\circ\cdot\cos 10^\circ - \sin 20^\circ\cdot\sin 10^\circ}$

б) $\frac{tg 73^\circ - tg 13^\circ}{1 + tg 73^\circ\cdot tg 13^\circ}$

3. Упростите выражения:

а) $ctg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

б) $\frac{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha}{\sin 4\alpha + \sin 6\alpha}$

4. Доказать тождество:

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1 = \sin 2\alpha$

Практическая работа № 5

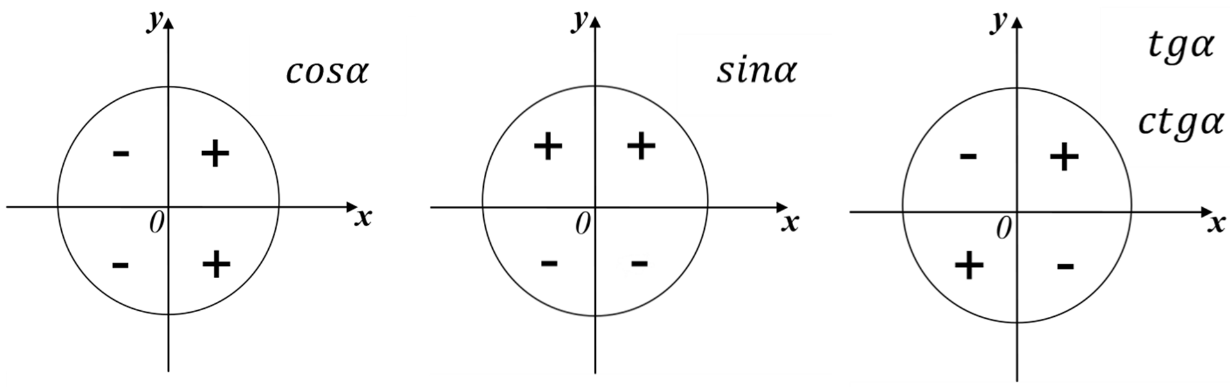
Тема: Тригонометрические функции.

Цель: Отработать умения использовать свойства тригонометрических функций при преобразовании тригонометрических выражений.

Методические рекомендации

При выполнении заданий данной практической работы, воспользуйтесь методическими рекомендациями к практической работе № 4, а также предложенными методическими рекомендациями.

Знаки значений тригонометрических функций по четвертям.



Формулы приведения.

Если в формуле аргумент функции имеет вид: $\alpha; \frac{\pi}{2} \pm \alpha; \pi \pm \alpha; \frac{3\pi}{2} \pm \alpha; 2\pi \pm \alpha$, то данные формулы называются формулами приведения.

При составлении формул приведения, необходимо пользоваться следующими правилами:

1. Знак функции, стоящей в правой части равенства, определяется по знаку функции, стоящей в левой части равенства.
2. Если аргумент функции имеет вид: $\pi \pm \alpha; 2\pi \pm \alpha$, то название функции не меняется. Если же аргумент функции имеет вид: $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha; \frac{\pi}{2} \pm \alpha$, то название функции меняется на сходное: $\sin$ на $\cos$, tg на ctg и наоборот.

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1. Найдите значение выражения: $2\sin 60^\circ + \cos 90^\circ - tg 45^\circ$

   1) $2\sqrt{3} - 1$; 2) $\sqrt{3} - 1$; 3) $\sqrt{3}$; 4) 0

2. Сравните с нулем выражения: $\sin 120^\circ$; $\cos 195^\circ$; $ctg 359^\circ$.

   1) + - - 2) - - + 3) + + - 4) + - +

3. Вычислите: $6\cos^2\frac{\pi}{4}+tg^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-ctg\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

1) 12; 2) $\sqrt{3}-3$; 3) 6; 4) 0

4. Упростите выражение: $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(\pi-\alpha)}{ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$

1) $-\cos^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha$; 3) $\sin^2\alpha$; 4) $-\sin^2\alpha$

5. Упростите выражение: $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot ctg\alpha-1$

1) 0; 2) $\cos^2\alpha$; 3) $-\sin^2\alpha$; 4) $\sin^2\alpha$

6. Упростите выражение: $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

1) $\sin\alpha-\cos\alpha$; 2) $-2ctg2\alpha$; 3) $tg2\alpha$; 4) $0{,}5ctg2\alpha$

7. Вычислите: $2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ$

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\frac{1}{2}$

8. Вычислите: $\cos\frac{7\pi}{4}$

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) 0

9. Представив 105° как $60^\circ+45^\circ$, вычислите $\sin 105^\circ$

1) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

10. Дано: $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, где $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Найдите $tg2\alpha$.

1) $\frac{6}{7}$; 2) $-3\frac{3}{5}$; 3) $1\frac{5}{7}$; 4) $3\frac{3}{7}$

2 вариант

1. Найдите значение выражения: $5\sin 30^\circ-ctg45^\circ+\cos 180^\circ$

1) $2{,}5$; 2) $0{,}5$; 3) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; 4) $1{,}5$

2. Сравните с нулем выражения: $\sin 187^\circ$; $\cos 125^\circ$; $tg80^\circ$

1) + - + 2) - + + 3) - - + 4) - + -

3. Вычислите: $5\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+4\cos 0-3\sin\frac{3\pi}{2}+\cos^2\frac{\pi}{6}$

1) $2\frac{3}{4}$; 2) $-4\frac{1}{4}$; 3) $-4\frac{3}{4}$; 4) $1\frac{3}{4}$

4. Упростите выражение: $\dfrac{tg(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{tg\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$

1) $tg^2\alpha$; 2) $-tg^2\alpha$; 3) $-ctg^2\alpha$; 4) $ctg^2\alpha$

5. Упростите выражение: $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\cos\alpha$

1) $-\sin\alpha$; 2) $\sin\alpha$; 3) $-2\cos\alpha$; 4) $\sin\alpha-2\cos\alpha$

6. Упростите выражение: $\dfrac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$

1) $ctg^2\alpha$; 2) $tg^2\alpha$; 3) $-tg^2\alpha$; 4) $-ctg^2\alpha$

7. Вычислите: $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$

1) $2\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 0

8. Вычислите: $\cos 150^\circ$

1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\dfrac{1}{2}$

9. Представив 15° как $45^\circ-30^\circ$, вычислите $\cos 15^\circ$

1) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; 2) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 3) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

10. Дано: $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$, где $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $ctg 2\alpha$

1) $-1\dfrac{1}{10}$; 2) $-\dfrac{119}{120}$; 3) $1\dfrac{1}{119}$; 4) $\dfrac{119}{120}$

3 вариант

1. Найдите значение выражения: $2\sin 60^\circ\cdot\cos 60^\circ+ctg 90^\circ$

1) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$; 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 0

2. Сравните с нулем выражения: $\sin 300^\circ$; $\cos 105^\circ$; $tg 70^\circ$

1) - + - 2) + + - 3) - - + 4) + - -

3. Вычислите: $3\sin(-\pi)+2tg 0-4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos^2\dfrac{\pi}{3}$

1) $-4\dfrac{1}{4}$; 2) $-3\dfrac{3}{4}$; 3) $4\dfrac{1}{4}$; 4) $1\dfrac{3}{4}$

4. Упростите выражение: $\frac{1-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}{\sin(\pi-3\alpha)-\sin(-\alpha)}$

1) $\frac{1}{2\sin\alpha}$; 2) 1; 3) $-\frac{1}{2\sin\alpha}$; 4) 0

5. Упростите выражение: $\sin\alpha\cdot ctg\alpha-\cos\alpha+1$

1) -1; 2) 1; 3) 0; 4) нет реш.

6. Упростите выражение: $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

1) $-2tg\alpha$; 2) $ctg\alpha$; 3) $-2ctg\alpha$; 4) 1

7. Вычислите: $2\sin 45^\circ\cdot\cos 45^\circ$

1) 1; 2) 0; 3) -1; 4) 2

8. Вычислите: $\sin\frac{2\pi}{3}$

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 3) 0; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. Представив 75° как $45^\circ+30^\circ$, вычислите $\sin 75^\circ$

1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

10. Дано: $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. Вычислите $\cos 2\alpha$

1) $-\frac{7}{25}$; 2) $\frac{7}{25}$; 3) $\frac{4}{15}$; 4) $-\frac{4}{15}$

4 вариант

1. Найдите значение выражения: $2\sin 90^\circ+tg45^\circ+\cos 270^\circ$

1) 3; 2) 5; 3) 0; 4) 4

2. Сравните с нулем выражение: $\sin 25^\circ$; $\cos 210^\circ$; $ctg105^\circ$

1) - - + 2) + - - 3) - + - 4) + - +

3. Вычислите: $4\cos^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{3}-tg(-\pi)$

1) $2\frac{3}{4}$ 2) $-2\frac{3}{4}$ 3) 0 4) 1

4. Упростите выражение: $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

1) $tg\alpha$; 2) $\frac{2}{\cos\alpha}$; 3) $-\frac{2}{\cos\alpha}$; 4) $\sin\alpha$

5. Упростите выражение: $-\cos\alpha \cdot tg\alpha \cdot \sin\alpha + 1$

1) $\sin^2\alpha$; 2) $-\sin^2\alpha$; 3) $\cos^2\alpha$; 4) $-\cos^2\alpha$

6. Упростите выражение: $\dfrac{2\sin^2\alpha}{1+\cos(\pi-2\alpha)} - \sin^2\alpha$

1) $-\sin^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\cos^2\alpha$; 4) $-\cos^2\alpha$

7. Вычислите: $\cos^2\dfrac{\pi}{12} - \sin^2\dfrac{\pi}{12}$

1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

8. Вычислите: $\sin 300^\circ$

1) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) $-\dfrac{1}{2}$

9. Представьте 15° как $45^\circ - 30^\circ$ и вычислите $tg15^\circ$

1) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; 4) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

10. Дано: $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Найти $\sin 2\alpha$.

1) $\dfrac{24}{25}$; 2) $\dfrac{25}{24}$; 3) $-\dfrac{24}{25}$; 4) $-\dfrac{25}{24}$

Практическая работа № 6

Тема: Тригонометрические уравнения.
Цель: Отработать навыки решения различных видов тригонометрических уравнений.

Методические рекомендации

I. *Решение простейших тригонометрических уравнений.*

Уравнение	Формулы решения	Частные случаи
$\sin x = a$	при $\lvert a\rvert \le 1$ $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in z$ при $\lvert a\rvert > 1$ - решений нет	$\sin x = 0$; $x = \pi k$, $k \in z$ $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in z$ $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in z$
$\cos x = a$	при $\lvert a\rvert \le 1$ $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in z$ при $\lvert a\rvert > 1$ - решений нет	$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in z$ $\cos x = 1$; $x = 2\pi n$, $n \in z$ $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in z$
$tgx = a$	a - любое число $x = arctga + \pi k$, $k \in z$	-
$ctgx = a$	a - любое число $x = arcctga + \pi k$, $k \in z$	-

II. Тригонометрические уравнения.

Уравнение	Способ решения	Формулы
1. Уравнение содержит только синусы или косинусы (синусы и косинусы) вида $a\sin^2 f(x) + b\sin f(x) + c = 0$ $a\cos^2 f(x) + b\cos f(x) + c = 0$ и т.д.	Уравнение сводится к квадратному (биквадратному) относительно синуса (косинуса)	$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ $ax^2 + bx + c = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
2. Однородное уравнение I степени вида $a\sin x + b\cos x = 0$ $(a \ne 0, \quad b \ne 0)$	Деление обеих частей на $\cos x \ne 0$. Получаем: $atgx + b = 0$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = tg\alpha$
3. Однородное уравнение II степени вида $a\sin^2 f(x) + b\sin f(x) \cdot$ $\cdot \cos f(x) + k\cos^2 f(x) = 0$	Деление обеих частей на $\cos^2 x \ne 0$. Получаем: $atg^2 f(x) + btgx + k = 0$	$tg\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
4. Уравнение вида $atgx + bctgx + c = 0$	Уравнение сводится к квадратному относительно тангенса заменой $ctgx = \frac{1}{tgx}$	$tgx \cdot ctgx = 1$ $ctgx = \frac{1}{tgx}$

III. Примеры решения тригонометрических уравнений.

1. $8\sin^2 x + 6\cos x - 3 = 0$,
$8(1-\cos^2 x) + 6\cos x - 3 = 0$,
$8\cos^2 x - 6\cos x - 5 = 0$
Пусть $\cos x = t$, тогда
$8t^2 - 6t - 5 = 0$
$D = 36 + 160 = 196$
$t_1 = \frac{6+14}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$
$t_2 = \frac{6-14}{16} = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$
$\cos x = -\frac{1}{2}$ и $\cos x = \frac{5}{4}$
$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in z$ решений нет, т.к. $\frac{5}{4} > 1$
Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in z$.

2. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$
т.к. если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, а этого быть не может.
Делим обе части уравнения на $\cos x$:
$tgx - \sqrt{3} = 0$,
$tgx = \sqrt{3}$
$x = arctg\sqrt{3} + \pi k$, $k \in z$
$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in z$
Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in z$

Варианты заданий контрольной работы

1 вариант

1. Решите уравнения:
а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\cos\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $ctg2x = 2$; г) $tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

2. Решите уравнение, сделав подстановку:
а) $2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$; б) $2tgx + 2ctgx = 5$

3. Решите уравнение методом разложения на множители:
а) $5\sin x + 3\sin 2x = 0$; б) $\sin 7x - \sin x = 0$

4. Решите уравнение, используя однородность:
а) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$; б) $\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 0$

2 вариант

1. Решите уравнения:
а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $tg2x = -\sqrt{3}$; г) $ctg\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

2. Решите уравнение, сделав подстановку:
а) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$; б) $3tgx - 3ctgx = 8$

3. Решите уравнение, методом разложения на множители:

а) $7\cos x - 4\sin 2x = 0$; б) $\cos 5x + \cos x = 0$

4. Решите уравнение, используя однородность:

а) $\sin x - \cos x = 0$; б) $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$

3 вариант

1. Решите уравнения:

а) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$; в) $ctg3x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

2. Решите уравнение, сделав подстановку:

а) $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$; б) $tg^2 x + 2tgx - 3 = 0$

3. Решите уравнение методом разложения на множители:

а) $\cos 3x - \cos x = 0$; б) $\sin 5x = \sin x$

4. Решите уравнение, используя однородность:

а) $\sin 2x = 2\sin^2 x$; б) $\sin x - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos x = 0$

4 вариант

1. Решите уравнения:

а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $tg3x = 0$; г) $ctg\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 3$

2. Решите уравнение, сделав подстановку:

а) $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$; б) $1 - tg^2 x = 2tgx$

3. Решите уравнение методом разложения на множители:

а) $\cos 2x = -\cos x$; б) $\sin 2x = 2\sin x$

4. Решите уравнение, используя однородность:

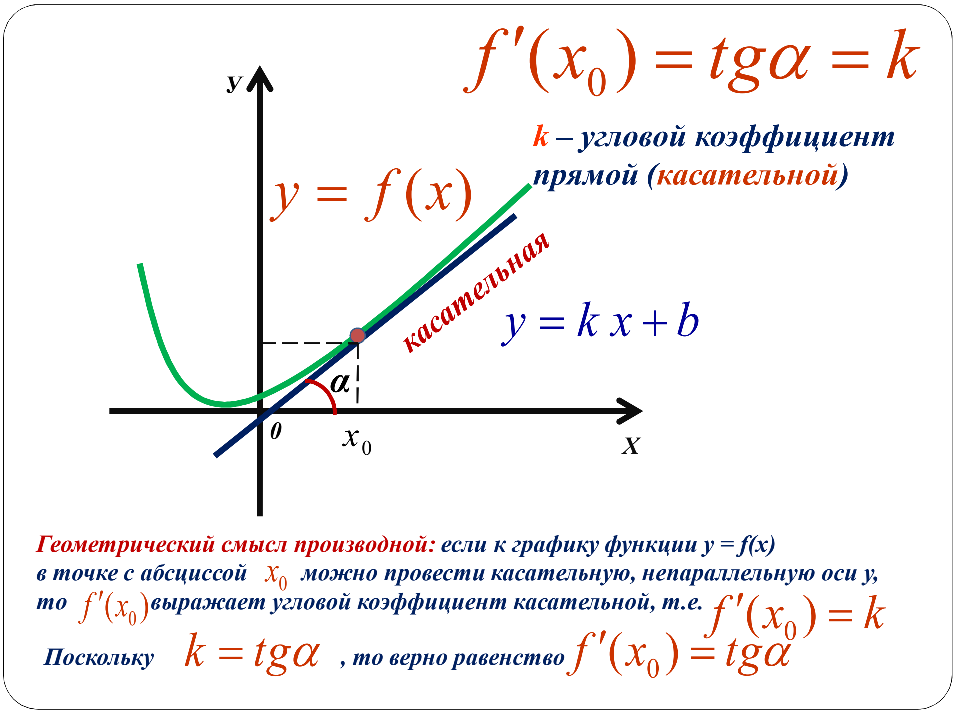
а) $\sin x + \frac{1}{2}\cos x = 0$; б) $4\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 1$

Практическая работа № 7

Тема: Уравнение касательной к графику функции.
Цель: Отработать умения применять геометрический смысл производной при решении различных видов задач.

Методические рекомендации

Геометрический смысл производной



Применение производной	Алгоритм
I. Составление уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$	1. Найти значение функции $f(x_0)$. 2. Найти производную функции $f'(x)$. 3. Найти значение производной в т. x_0 : $f'(x_0)$. 4. Составить уравнение $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

<u>Пример</u>

а) Для функции $f(x) = x^3 - 5x^2$ составить уравнение касательной в точке $x_0 = 2$.

Решение.

1. $f(x_0) = f(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 = 8 - 20 = -16$
2. $f'(x) = \left(x^3 - 5x^2\right)' = 3x^2 - 10x$
3. $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 = 12 - 20 = -8$
4. $y = -16 - 8(x - 2)$

   $y = -16 - 8x + 16$

   $y = -8x$ - искомое уравнение.

Правила дифференцирования и таблица производных основных функций.

Правила.

1. $C' = 0$
2. $x' = 0$
3. $(U \pm \vartheta)' = U' \pm \vartheta'$
4. $(U \cdot \vartheta)' = U' \cdot \vartheta + U \cdot \vartheta'$
5. $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$
6. $\left(\dfrac{U}{\vartheta}\right)' = \dfrac{U' \cdot \vartheta - U \cdot \vartheta'}{\vartheta^2}$

Производные основных элементарных функций.

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \neq 0$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
4. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
9. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
13. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Варианты заданий практической работы

В заданиях выберите правильный ответ среди предложенных, обозначенных буквами А, Б, В.

1 вариант

1. Найти угол, который образует с положительным направлением оси ОХ касательная к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x - 2$ в точке $A\left(2; -7\frac{1}{3}\right)$.

   А) 30°; Б) 45°; В) 60°

2. Сравнить углы α и β, которые образуют с положительным направлением оси ОХ касательные к графикам функций $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$ и $g(x) = x^2 - 3x + 1$ соответственно в точках $A\left(\frac{\pi}{6}; -\frac{1}{2}\right)$ и $B(2;-1)$.

   А) $\alpha > \beta$; Б) $\alpha < \beta$; В) $\alpha = \beta$

3. В каких точках угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=2x^3+9x^2+3x-5$ равен 3?

А) $0;-3$ Б) -3 В) $0;3$

4. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-7x$, проходящей через точку с ординатой -6 и наименьшей абсциссой.

А) $y=5x-36$; Б) $y=-19-36$; В) $y=-5x-1$

5. Написать уравнение касательной, проходящей через общие точки кривых $f(x)=2x^2-2x+3$ и $g(x)+3$.

А) $y=2x-1$; Б) $y=2x+1$; В) $y=x-2$

2 вариант

1. Найти угол, который образует с положительным направлением оси ОХ касательная к графику функции $y=x^3+x^2-2x+1$ в точке $A(1;2)$.

А) 45°; Б) $71^\circ 36'$; В) $18^\circ 24'$

2. Сравнить углы α и β, которые образуют с положительным направлением оси ОХ касательные к графикам функций $f(x)=\cos^2 x-1$ и $g(x)=\frac{1}{2}x^2+4$ соответственно в точках $A\left(\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$ и $B(2;1)$.

А) $\alpha>\beta$; Б) $\alpha=\beta$; В) $\alpha<\beta$

3. Найти угол наклона касательной к кривой $f(x)=\left(4-\sqrt{x}\right)^2$ в точке $x_0=4$.

А) $\frac{\pi}{4}$; Б) $\frac{3\pi}{4}$; В) $-\frac{\pi}{4}$

4. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-2$, проходящей через точку с ординатой 6.

А) $y=12x+4$; Б) $y=x+4$; В) $y=12x-18$

5. Найти площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=x^2-2$ в точке $x_0=1$.

А) 2; Б) $3\frac{1}{2}$; В) $2\frac{1}{4}$

3 вариант

1. Найти угол, который образует с положительным направлением оси ОХ касательная к графику функции $y=x^3-2x+10$ в точке $A(1;2)$.

А) 25°; Б) $40^\circ 12'$; В) 45°

2. В каких точках угловой коэффициент касательной к кривой $f(x)=x^3+4x-2$ равен 7?
   А) 1; Б) $-1;1$ В) -1

3. Сравнить углы α и β, которые образуют с положительным направлением оси ОХ касательные к графикам функций $f(x)=\sin^2 x+1$ и $g(x)=x^2-2x$ соответственно в точках $A\left(-\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$ и $B(1;-2)$.
   А) $\alpha>\beta$; Б) $\alpha=\beta$; В) $\alpha<\beta$

4. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+5x$, проходящей через точку с ординатой 6 и наибольшей абсциссой.
   А) $y=7x-1$; Б) $y=-7x+1$; В) $y=x-1$

5. Написать уравнение касательной, проходящей через общие точки кривых $f(x)=x^2-x+4$ и $g(x)=x^2+5$.
   А) $y=x-2$; Б) $y=2-4x$; В) $y=4x+2$

4 вариант

1. Найти угол, который образует с положительным направлением оси ОХ касательная к графику функции $f(x)=x^3+3x^2+5$ в точке $A(1;-2)$.
   А) $6^\circ 20'$; Б) 30°; В) $83^\circ 40'$

2. Сравнить углы α и β, которые образуют с положительным направлением оси ОХ касательные к графикам функций $f(x)=-(\cos^2 x-\sin^2 x)$ и $g(x)=\frac{1}{3}x^3-4$ соответственно в точках $A\left(\frac{\pi}{6};1\right)$ и $B(-2;-1)$.
   А) $\alpha<\beta$; Б) $\alpha=\beta$; В) $\alpha>\beta$

3. Найти угол наклона касательной к кривой $f(x)=\left(6-\sqrt{x}\right)^2$, в точке $x_0=9$.
   А) $\frac{3\pi}{4}$; Б) $\frac{\pi}{4}$; В) $-\frac{\pi}{4}$

4. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3+6$, проходящей через точку с ординатой -2.
   А) $y=-12x+22$; Б) $y=12x+22$; В) $y=12x-22$

5. Найти площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=x^2+x$ в точке $x_0=2$.
   А) $1\frac{3}{5}$; Б) 2; В) $1\frac{1}{5}$

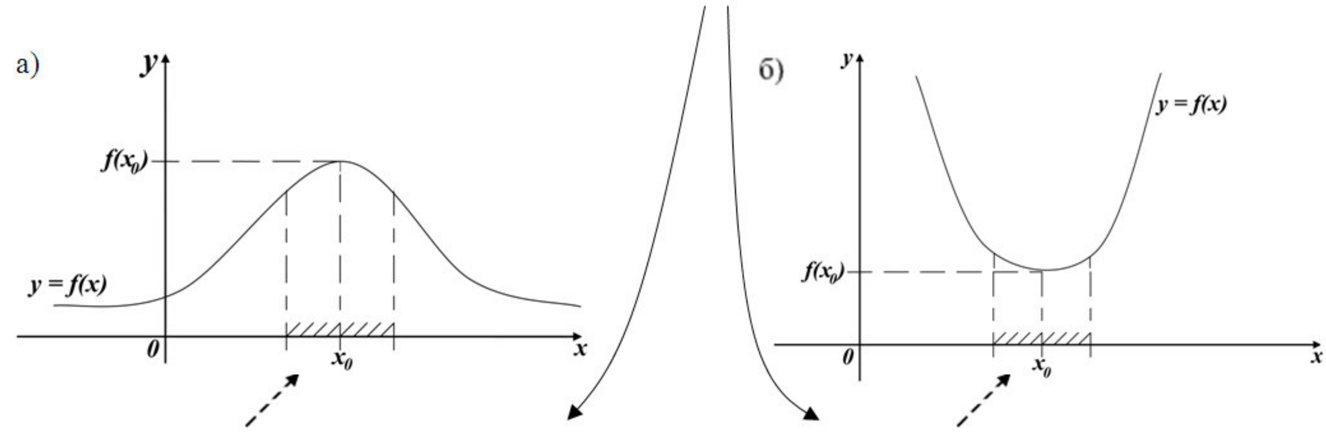
Практическая работа № 8

Тема: Экстремум функции.

Цель: Отработать навыки нахождения точек максимума и минимума, промежутков возрастания и убывания функции, используя график функции и график производной функции.

Методические рекомендации

О. Точка экстремума



О. Точка максимума
для всех x, $f(x) \geq f(x_0)$

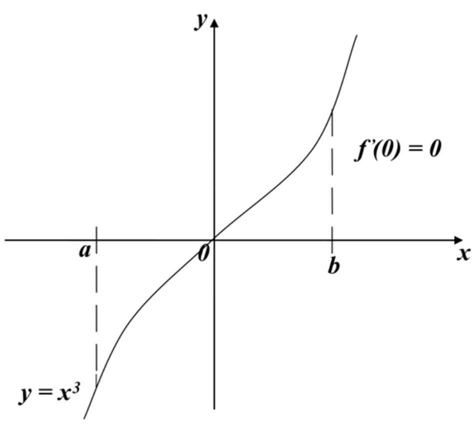
О. Точка минимума
для всех x, $f(x) \leq f(x_0)$

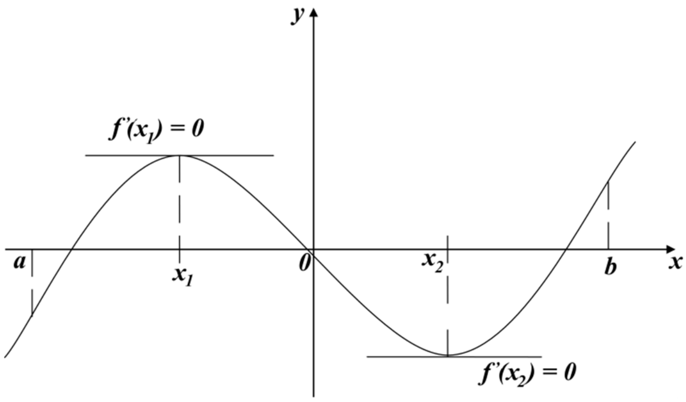
Т. (необходимое условие экстремума)
1. $f(x)$ определена в окрестности точки x_0
2. $f'(x)$ существует
3. x_0 - точка экстремума

$$\overline{\qquad f'(x_0) = 0 \qquad}$$

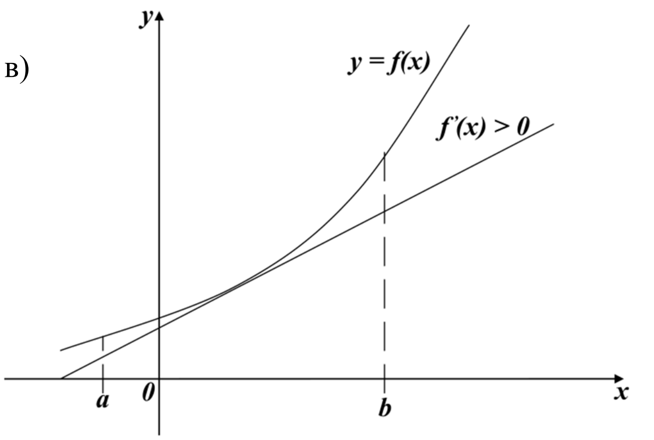
О. Стационарная точка $f(x)$
1. $x_0 \in D(f)$
2. корень $f'(x) = 0$

<u>Примеры.</u>





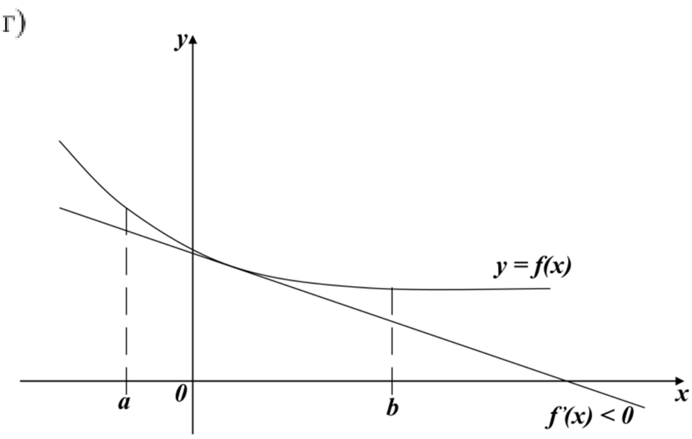
в)



Т. $f'(x) > 0$, $x \in (a;b)$

$f(x)$ возрастает на $(a;b)$

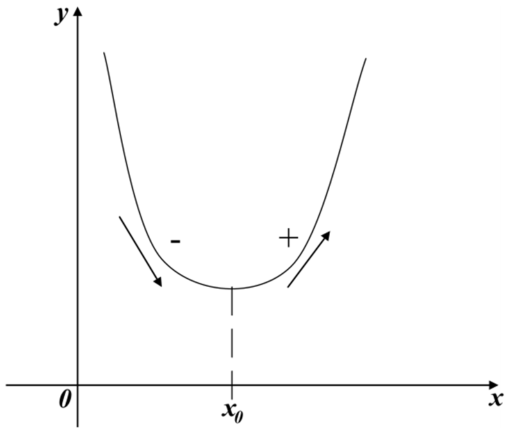
г)



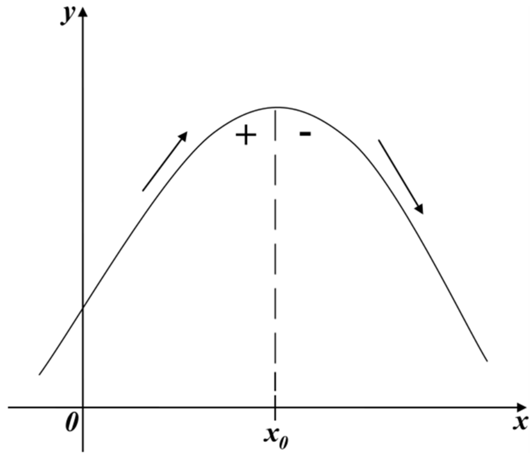
Т. $f'(x) < 0$, $x \in (a;b)$

$f(x)$ убывает на $(a;b)$

д)



е)



Теорема.

1. $f'(x) = 0$, x_0 - стационарная точка

2. слева от x_0 $f'(x) < 0$
справа от x_0 $f'(x) > 0$

x_0 - точка минимума

2. слева от x_0 $f'(x) > 0$
справа от x_0 $f'(x) < 0$

x_0 - точка максимума

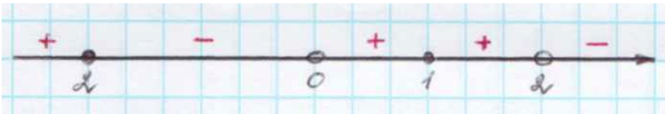
Применение производной	Алгоритм
I. Нахождение интервалов монотонности функции $y = f(x)$	1. Вычислить $f'(x)$ данной функции $f(x)$. 2. Найти критические точки, для этого решить уравнение $f'(x) = 0$. 3. Критическими точками разбить область определения на интервалы. 4. На каждом из интервалов определяем знак производной. Для этого берем произвольное число из рассматриваемого интервала и подставляем в производную функции. По знаку ответа определяем знак производной. 5. По знаку производной делаем вывод о возрастании, убывании функции.
II. Исследование функции на экстремум	1. Найти производную функции $f'(x)$.

	2. Решить уравнение $f'(x)=0$ и найти критические точки. 3. Критическими точками разбить область определения на интервалы. 4. Исследовать знак производной в некоторой окрестности каждой критической точки. 5. а) если при переходе через т. x_0 производная меняет знак с «+» на «-», x_0 - точка <u>максимума</u>; б) если при переходе через т. x_0 производная меняет знак с «-» на «+», то т. x_0 - точка <u>минимума</u>.

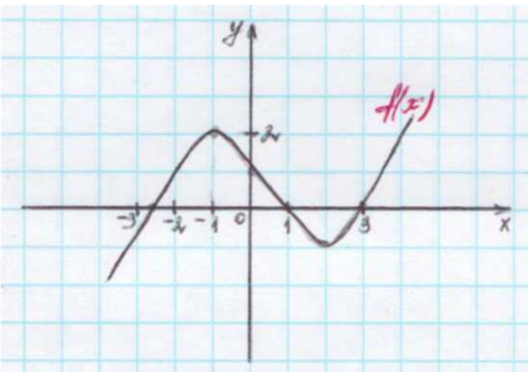
Варианты заданий практической работы

1 вариант

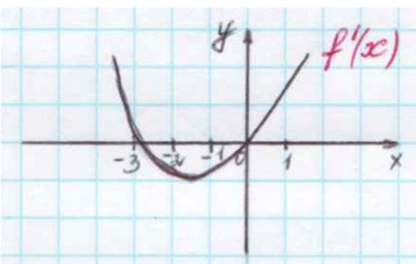
1. Производная функции $f(x)$ на отрезке $[-2;8]$ меняет свой знак в точке $x=0$, при этом $f'(0)>0$. Поэтому данная функция на промежутке … возрастает, а убывает на промежутке … .
2. Если $f'(x)>0$ для всех $x \in D(f)$, то функция является … .
3. Из данных функций $f(x)=3x+\cos x$; $g(x)=x^2+5x+\cos 2x$;
   $h(x)=-3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-4x+\pi$ убывающей является … .
4. Знак производной функции $g(x)$ изменяется по схеме:



   функция $g(x)$ убывает на промежутках …
   функция $g(x)$ возрастает на промежутках …
   функция $g(x)$ имеет точки максимума …
5. Дан график функции $f(x)$:

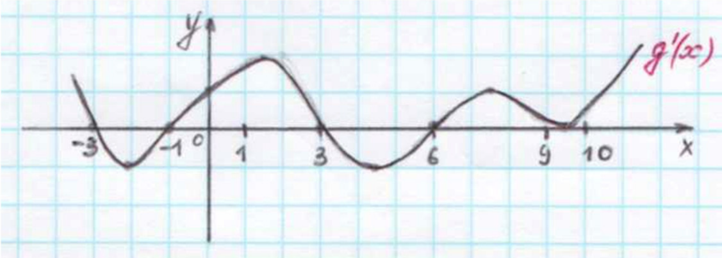


   $f'(x)>0$ на промежутках …
   $f'(x)<0$ на промежутках …
   точки максимума функции $f(x)$ …
   точки минимума функции $f(x)$ … .
6. Дан график производной функции $f(x)$



   тогда функция $f(x)$ возрастает …, убывает … . Точки экстремума функции $f(x)$…

7. Дан график производной функции $g(x)$:



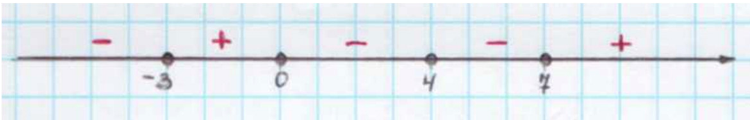
точки максимума функции $f(x)$…

точки минимума функции $f(x)$…

8. Функция $h(x) = -\frac{1}{x^3}$ … точек экстремума, так как …

2 вариант

1. Производная функции $f(x)$ на отрезке $[-4;2]$ меняет свой знак в точке $x = -1$, при этом $f'(-1) < 0$. При этом данная функция на промежутке … возрастает, а убывает на промежутке … .
2. Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in D(f)$, то функция является … .
3. Из данных функций $f(x) = 2x + \sin x$; $g(x) = x^3 + 4x$; $h(x) = -x^2 - 7x + \pi$, возрастающей является … .
4. Знак производной функции $g(x)$ изменяется по схеме:

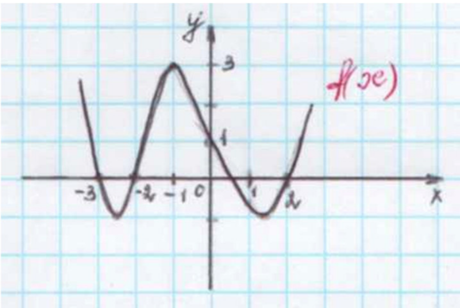


функция $g(x)$ убывает на промежутках …

функция $g(x)$ возрастает на промежутках …

функция $g(x)$ имеет точки минимума …

5. Дан график функции $f(x)$:



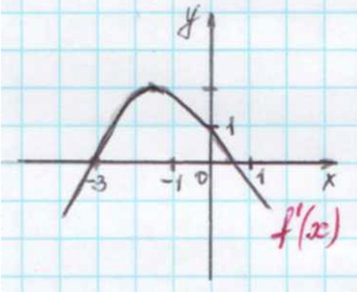
$f'(x) > 0$ на промежутках …

$f'(x) < 0$ на промежутках …

точки максимума функции $f(x)$ …

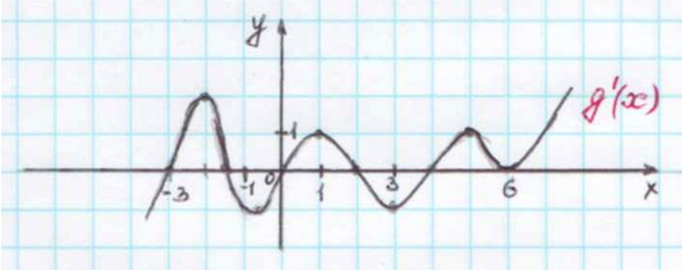
точки минимума функции $f(x)$ …

6. Дан график производной функции $f(x)$:



тогда функция $f(x)$ возрастает …, убывает … . Точки экстремума функции $f(x)$ …

7. Дан график производной функции $g(x)$:



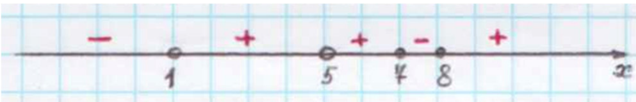
точки максимума функции $g(x)$ …

точки минимума функции $g(x)$ …

8. функция $h(x)=\dfrac{1}{2x^2}$ … точек экстремума, так как …

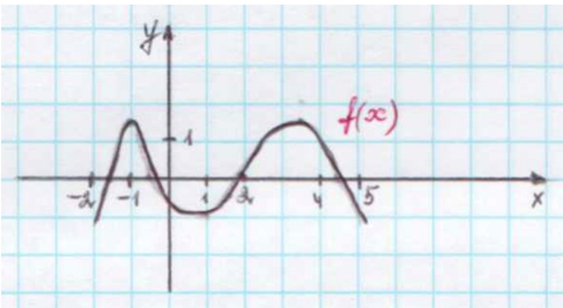
3 вариант

1. Производная функции $f(x)$ на отрезке $[1;5]$ меняет свой знак в точке $x=3$, при этом $f'(3)>0$. Поэтому на промежутке … возрастает, а убывает на промежутке …
2. Если $f'(x)>0$ для всех $x\in D(f)$, то функция является … .
3. Из данных функций $f(x)=2x+\cos x$; $g(x)=x^2+3x+\cos 2x$; $h(x)=-3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-2x$ убывающей является … .
4. Знак производной функции $g(x)$ изменяется по схеме:



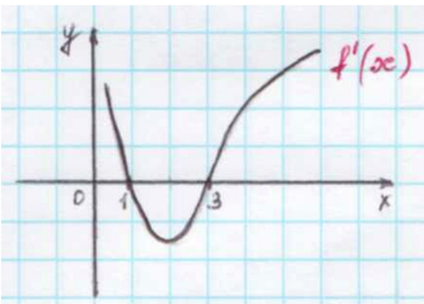
функция $g(x)$ убывает на промежутке …
функция $g(x)$ возрастает на промежутке …
функция $g(x)$ имеет точки максимума …

5. Дан график функции $f(x)$:



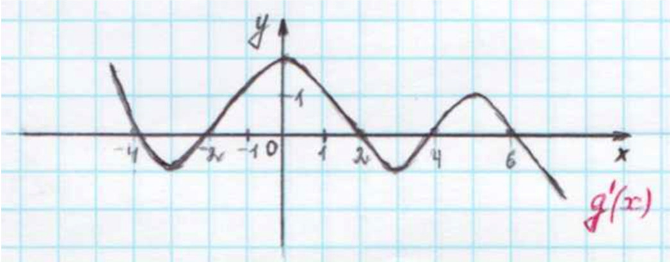
$f'(x)>0$ на промежутках …
$f'(x)<0$ на промежутках …
точки минимума функции $f(x)$ …

6. Дан график производной функции $f(x)$:



тогда функция $f(x)$ возрастает …, убывает … .
Точки экстремума функции $f(x)$ …

7. Дан график производной функции $g(x)$:



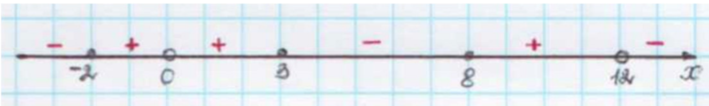
точки максимума функции $g(x)$ …

точки минимума функции $g(x)$ …

8. Функция $h(x) = x^2 - 2x + 1$ … точек экстремума, так как …

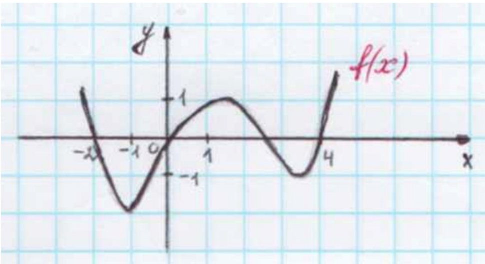
4 вариант

1. Производная функции $f(x)$ на отрезке $[-3;4]$ меняет свой знак в точке $x = 0$, при этом $f'(0) < 0$. Поэтому данная функция на промежутке … возрастает, а убывает на промежутке … .
2. Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in D(f)$, то функция является … .
3. Из данных функций $f(x) = 2x + \sin x$; $g(x) = x^3 + 3x$; $h(x) = -x^2 - 5x + 8$ возрастающей является …
4. Знак производной функции $g(x)$ изменяется по схеме:



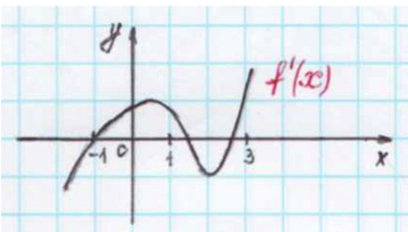
функция $g(x)$ убывает на промежутке …
функция $g(x)$ возрастает на промежутке …
функция $g(x)$ имеет точки минимума …

5. Дан график функции $f(x)$:



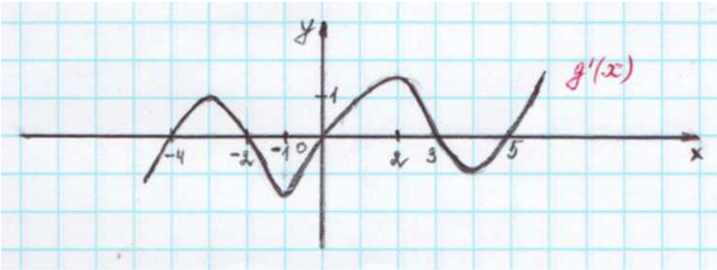
$f'(x) > 0$ на промежутках …
$f'(x) < 0$ на промежутках …
точки максимума функции $f(x)$ …

6. Дан график производной функции $f(x)$:



тогда функция $f(x)$ возрастает …, убывает … . Точки экстремума функции $f(x)$ …

7. Дан график производной функции $g(x)$:



точки максимума функции $g(x)$ …

точки минимума функции $g(x)$ …

8. Функция $h(x) = x^3 - \dfrac{2}{x}$ … точек экстремума, так как …

Практическая работа № 9

Тема: Производная.

Цель: Отработать навыки нахождения производных функций. Уметь применять физический смысл производной к решению прикладных задач, схему исследования функции к построению графика функции, находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Методические рекомендации

Правила дифференцирования и таблица производных основных функций.

<u>Правила.</u>

1. $C' = 0$
2. $x' = 0$
3. $(U \pm \vartheta)' = U' \pm \vartheta'$
4. $(U \cdot \vartheta)' = U' \cdot \vartheta + U \cdot \vartheta'$
5. $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$
6. $\left(\dfrac{U}{\vartheta}\right)' = \dfrac{U' \cdot \vartheta - U \cdot \vartheta'}{\vartheta^2}$

<u>Производные основных элементарных функций.</u>

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \; n \neq 0$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
4. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
9. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
13. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Применение производной	Алгоритм
I.Построение графика функции $y = f(x)$	1. Найти область определения функции $D(f)$. 2. Исследовать функцию на четность, нечетность. 3. а) найти точки пересечения с осью OX (если возможно), для этого достаточно решить систему $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$ б) найти точки пересечения с осью OY, для этого решить систему $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$

	4. Найти $f'(x)$ и решить уравнение $f'(x)=0$. 5. Найти интервалы монотонности и экстремума функции. 6. Найти дополнительные точки. 7. Построить график функции.
II.Нахождение наибольшего, наименьшего значения функции на отрезке.	1. Найти производную функции $f'(x)$. 2. Найти критические точки решив уравнение $f'(x)=0$. 3. Вычислить значение функции в критических точках, принадлежащих данному промежутку. 4. Вычислить значение функции на концах отрезка. 5. Среди всех полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

<u>Примеры</u>

а) Найдите наибольшее значение функции $f(x)=x^3-6x^2+9x+5$ на отрезке $[0;4]$.

Решение.

1. $f'(x)=\left(x^3-6x^2+9x+5\right)'=3x^2-12x+9$

2. $f'(x)=0$; $3x^2-12x+9=0$; $x^2-4x+3=0$; $D=16-12=4$; $x_1=1$; $x_2=3$

3. $x=1\in[0;4]$; $f(1)=1-6+9+5=9$;

$x=3\in[0;4]$; $f(3)=27-54+27+5=5$

4. $f(0)=5$; $f(4)=64-96+36+5=9$

5. $f_{íàèá.}=f(1)=f(4)=9$.б

б) Исследовать и построить график функции $y=x^3-6x^2+9x-3$.

Решение.

1. Область определения $x\in(-\infty;+\infty)$

2. $f'(x)=\left(x^3-6x^2+9x-3\right)'=3x^2-12x+9$

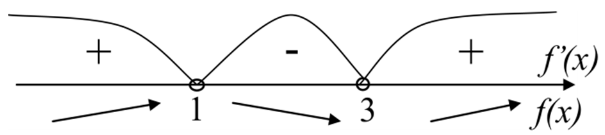
3. $f'(x)=0$; $3x^2-12x+9=0$

$x^2-4x+3=0$

$D=16-12=4>0$, 2 корня

$x_1=3$; $x_2=1$

4; 5.



$x=1$ - т. максимума; $x=3$ - т. минимума

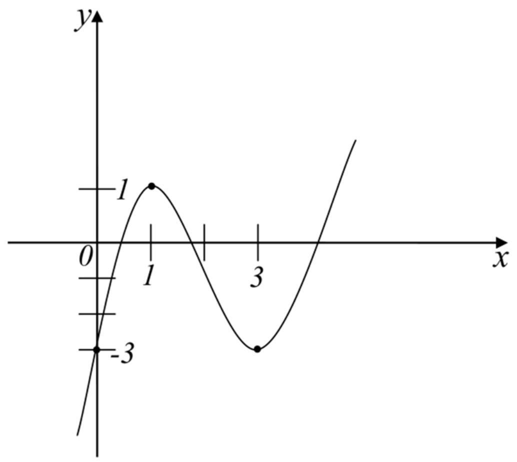
6. $f(1)=1-6+9-3=1$

$f(3)=27-54+27-3=-3$

т. $A(1;1)$, т. $B(3;-3)$

7. $x=0$, тогда $y=-3$, т. $C(0;-3)$

8.



Физический смысл первой производной.

Физический смысл производной заключается в том, что мгновенная скорость движения $\vartheta(t)$ в момент времени *t* есть производная пути по времени, т.е.

$$\vartheta(t)=\frac{dS(t)}{dt}=S'(t)$$

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1. Найдите производную функции:

а) $y=x^2\cdot\sin 2x$; б) $y=\sqrt{\sin^3 3x-1}$; в) $y=\frac{x^3}{1-x^2}$

2. При движении тела по прямой, расстояние S (в метрах) изменяется по закону $S(t)=t^2+t+2$. Через сколько секунд после начала движения мгновенная скорость будет равна $5\,м/с$?
3. При каких значениях аргумента скорость изменения функции $f(x)$ равна скорости изменения функции $g(x)$?

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$; $g(x)=7{,}5x^2-16x$

4. Построить график функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[0;2]$.

2 вариант

1. Найдите производную функции

а) $y = x^3 \cdot \sin\dfrac{x}{3}$; б) $y = \sqrt{1 + 7tg2x}$; в) $y = \dfrac{x^2}{1 - x^3}$

2. При движении тела по прямой, расстояние S (в метрах) изменяется по закону $S(t) = 0?5t^2 - 4t + 6$. Через сколько секунд после начала движения тело остановится?

3. При каких значениях аргумента скорость изменения функции $f(x)$ равна скорости изменения функции $g(x)$?
$f(x) = x^3 - 3x^2$; $g(x) = 1{,}5x^2 - 9$

4. Построить график функции $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$.

5.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -x^3 + 3x + 1$ на отрезке $[-3;0]$.

3 вариант

1. Найти производную функции

а) $y = x^2 \cdot \cos 3x$; б) $y = \sqrt{1 - 8\sin\dfrac{x}{8}}$ в) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x}$

2. При движении тела по прямой, расстояние S (в метрах) изменяется по закону $S(t) = 3t^3 - 6t - 1$. Найти скорость тела через $2c$ после начала движения.

3. При каких значениях аргумента скорость изменения функции $f(x)$ равна скорости изменения функции $g(x)$?
$f(x) = x^3 - 5x^2$; $g(x) = x^3 - 10x$

4. Построить график функции $y = \dfrac{x^2 - 5}{x^2 + 5}$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^4 + 2x^2 - \dfrac{7}{4}$ на отрезке $[-1;2]$.

4 вариант

1. Найти производную функции

а) $y = x^3 \cdot \cos\dfrac{x}{3}$; б) $y = \sqrt{\cos^5\dfrac{x}{5} - 1}$; в) $y = \dfrac{x^2 - 1}{4 - 8x}$

2. Тело движется по прямой по закону $S(t) = 3t^3 - 2t - 3$. В какой момент времени скорость тела будет равна $34 м/с$?

3. При каких значениях аргумента скорость изменения функции $f(x)$ равна скорости изменения функции $g(x)$?

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+5x$; $g(x)=x^3+2x^2$

4. Построить график функции $y=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-3x^2+1$ на отрезке $[1;3]$.

Практическая работа № 10

Тема: Первообразная и интеграл.

Цель: Отработать навыки нахождения первообразной функции, значения определенного интеграла, использования геометрического и физического смысла определенного интеграла при решении прикладных задач.

Методические рекомендации

<u>Определение 1.</u> Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для всех $x \in [a;b]$ выполняется равенство:

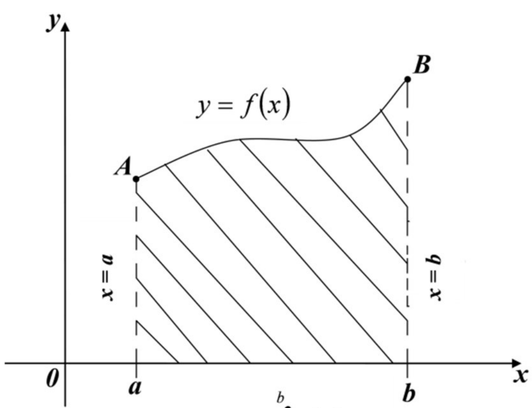
$$F'(x) = f(x)$$

<u>Таблица интегралов.</u>

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$,
4. $\int e^x dx = e^x + C$,
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$,
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$,
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$,
9. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$,
10. $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$,
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$,
12. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$,
13. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$,
14. $\int dx = x + C$,
15. $\int 0 dx = C$.

I. Геометрический смысл определенного интеграла.

Пусть дана функция $f(x)$ непрерывная на $[a;b]$. Рассмотрим график этой функции (некоторую кривую).



$S_{aABb} = \int_a^b f(x)dx$

- фигура $aABb$, ограниченная отрезком $[a;b]$ оси *OX*, отрезками параллельных прямых $x = a$ и $x = b$, и кривой $y = f(x)$, называется криволинейной трапецией.
- Если интегрируемая на $[a;b]$ функция $f(x)$ неотрицательна, то определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной $[a;b]$ оси *OX*, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и графиком данной функции. В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла.

II. Вычисление площадей плоских фигур.

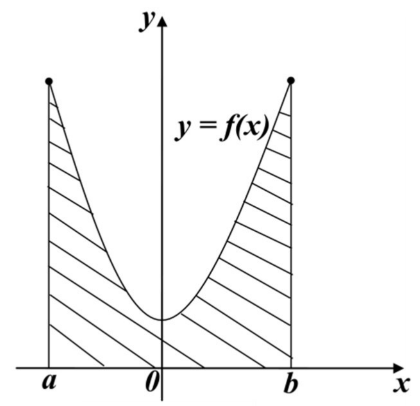
Из геометрического смысла определенного интеграла известно, что если $f(x) \geq 0$, $x \in [a;b]$, то площадь соответствующей криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

$$S_{aABb} = \int_a^b f(x)dx$$

Очевидно, что если $f(x) \leq 0$, $x \in [a;b]$, то $S_{aABb} = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

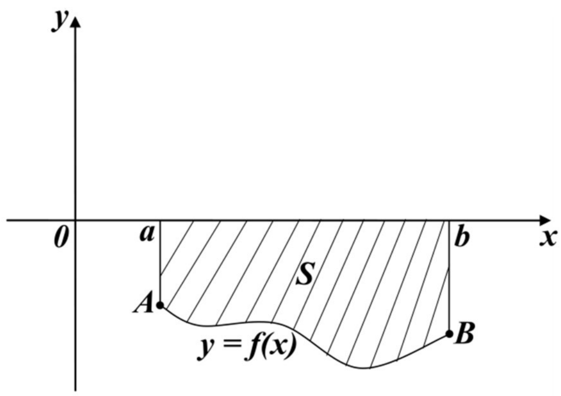
Рассмотрим основные случаи расположения плоских фигур:

1.



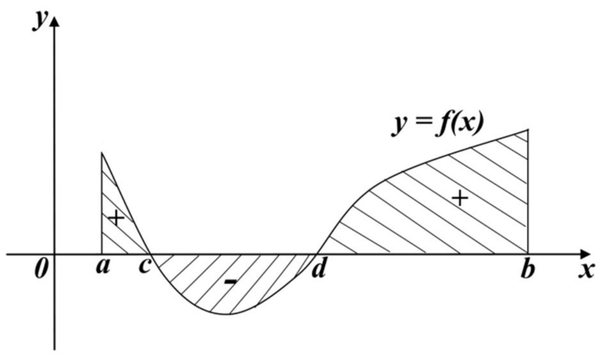
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

2.



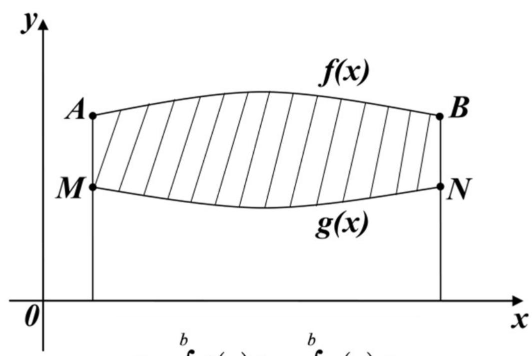
$$S_{aABb} = -\int_a^b f(x)dx$$

3.



$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

4.



$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

III. Применение определенного интеграла в физике.

1. Путь, пройденный точкой при неравномерном движении за промежуток времени от t_1 до t_2 вычисляется по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \vartheta(t)dt$$

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1. Определите функцию, для которой $F(x)=x^2-\sin 2x-1$ является первообразной:

1) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\cos 2x+x$; 2) $f(x)=2x-2\cos 2x$;

3) $f(x)=2x+\frac{1}{2}\cos 2x$; 3) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cos 2x+x$

2. Для функции $f(x)=x^2$, найдите первообразную $F(x)$, принимающую заданное значение в заданной точке $F(-1)=2$.

1) $F(x)=\frac{x^3}{3}+2\frac{1}{3}$; 2) $F(x)=2x+2\frac{1}{3}$; 3) $F(x)=-\frac{x^3}{3}+2\frac{1}{3}$; 4) $F(x)=\frac{x^3}{3}-2\frac{1}{3}$

3. Точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна $\upsilon(t)=t+t^2$. Найдите путь, пройденный точкой за время от 1 до 3 секунд, если скорость измеряется в $м/с$.

1) $18м$; 2) $12\frac{1}{3}м$; 3) $17\frac{1}{3}м$; 4) $20м$

4. Вычислите: а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{6}{\cos^2 x}dx$; б) $\int_2^4 4xdx$.

а)

1) $6\sqrt{3}$; 2) 6; 3) $2\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{3}$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=-x^2+3; y=0$ б) $y=\sqrt{x};\ y=\frac{1}{2}x$

1) $4\sqrt{3}$; 3) $9\sqrt{3}$; 1) 2; 3) $2\frac{2}{3}$;

2) $6\sqrt{3}$; 4) $8\sqrt{3}$. 2) $1\frac{1}{3}$; 4) $1\frac{2}{3}$.

2 вариант

1. Определите функцию, для которой $F(x)=-\cos\frac{x}{2}-x^3+4$ является первообразной:

1) $f(x)=-\sin\frac{x}{2}-3x^2$; 3) $f(x)=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-3x^2$;

2) $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-3x^2$; 4) $f(x)=2\sin\frac{x}{2}-3x^2$.

2. Для функции $f(x)=2x-2$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $A(2;1)$.

1) $F(x)=-x^2-2x-1$ 2) $F(x)=x^2+2x+2$; 3) $F(x)=2x^2-2$ 4) $F(x)=x^2-2x+1$

3. Точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна $\upsilon(t)=3+0{,}2t$. Найдите путь, пройденный точкой за время от 1 до 7 секунд, если измеряется в $м/с$.

1) $22{,}8м$ 2) $29м$; 3) $23м$; 4) $13м$

4. Вычислите: а) $\int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{x}{6}dx$; б) $\int\limits_{1}^{4}\left(x^2-6x\right)dx$

а)

1) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; 2) $3\sqrt{3}-3$; 3) 0; 4) $3-3\sqrt{3}$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=2x^2$; $y=0$; $x=2$

1) $5\frac{2}{3}$; 3) $5\frac{1}{3}$;

2) $2\frac{1}{3}$; 4) $2\frac{2}{3}$

б) $y=5-x^2$; $y=1$;

1) 16; 3) $11\frac{1}{3}$;

2) $5\frac{1}{3}$; 4) $10\frac{2}{3}$

3 вариант

1. Определите функцию, для которой $F(x)=x^3-\sin 3x+2$ является первообразной:

1) $f(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}\cos 3x$;

2) $f(x)=3x^2-3\cos 3x$;

3) $f(x)=3x^2+\sin 3x$;

4) $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\cos 3x$

2. Для функции $f(x)=x^3$ найдите первообразную $F(x)$, принимающую заданное значение в заданной точке: $F(1)=\frac{1}{4}$

1) $F(x)=\frac{x^3}{3}-2$; 2) $F(x)=\frac{1}{4}x^4$; 3) $F(x)=\frac{1}{4}x^4+3$; 4) $F(x)=-\frac{x^3}{3}$

3. Скорость движения точки $\upsilon(t)=\left(18t-3t^2\right)м/с$. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до остановки.

1) $108м$; 2) $92м$; 3) $36м$; 4) $20м$

4. Вычислите: а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx$; б) $\int\limits_{0}^{2}x^3dx$

а)

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $-\frac{\pi}{2}$; 3) 0; 4) 1

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^2-1$; $y=0$

1) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{3}{2}$;

б) $y=x^3$; $x=2$; $x=0$

1) 2; 3) 4;

2) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{3}{4}$ 2) 3; 4) 1

4 вариант

1. Определите функцию, для которой $F(x)=x^3-\cos 3x+2$ является первообразной:

1) $f(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}\cos 3x$;
2) $f(x)=3x^2-3\cos 3x$;
3) $f(x)=3x^2+3\sin 3x$;
4) $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\cos 3x$

2. Для функции $f(x)=3x^2-3$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $A(2;2)$.

1) $F(x)=-x^3-3x$; 2) $F(x)=x^3+3x-1$; 3) $F(x)+x^3-3x$; 4) $F(x)=x^2-5$

3. Скорость движения точки $\upsilon(t)=(24t-t^2)\,м/с$. Найдите путь. Пройденный точкой за третью секунду.

1) $10м$; 2) $32м$; 3) $108м$; 4) $24м$

4. Вычислите: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 3x dx$; б) $\int\limits_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}}$

а)

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 0

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^2+1$; $x=0$; $x=1$

1) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{4}{3}$;
2) 1; 4) 2

б) $y=4-x^2$; $y=0$

1) $\frac{16}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$;
2) 1; 4) $\frac{32}{3}$

Практическая работа №11

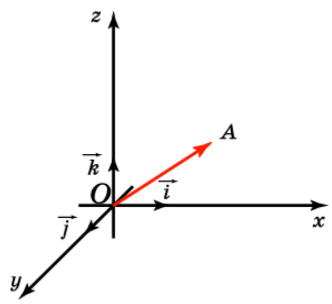
Тема: Координаты вектора

Цель: Отработать умения использовать формулы координат вектора при решении задач.

Методические рекомендации

Вектором (геометрическим) называется направленный отрезок. Обозначается $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\overrightarrow{AB}$

Отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются координатами вектора. Обозначим $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторы с координатами (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы, отложенными от начала координат и называть их координатными векторами.



<u>Теорема.</u> Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y, z) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$/

Действия над векторами	Запись	Пример
1	2	3
1. Результатом умножения вектора $\overline{a}$ на число k является вектор $\overline{b} = k\overline{a}$	$\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$, k – число, то $\overline{b} = k\overline{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$	$\overline{a} = (-1;2;0)$; $k = 3$, тогда $\overline{b} = 3\overline{a} = (3\cdot(-1);3\cdot 2;3\cdot 0) =$ $= (-3;6;0)$
2. Сложение векторов. Вычитание векторов.	$\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$; $\overline{b}(b_1; b_2; b_3)$ $\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$ $\overline{a} - \overline{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$	$\overline{a}(2;-3;1)$; $\overline{b}(0;1;4)$, тогда $\overline{a} + \overline{b} = (2+0;-3+1;1+4) =$ $= (2;-2;5)$
3. Нахождение координат вектора. При определении координат вектора из соответствующих координат его конца вычитают координаты начала	$M_1(x_1; y_1; z_1)$; $M_2(x_2; y_2; z_2)$ $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$	$M_1(2;-1;4)$, $M_2(3;1;0)$ $\overline{M_1M_2}(3-2;1-(-1);0-4)$; $\overline{M_1M_2}(1;2;-4)$
4. Длина вектора.	$\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$	$\overline{a}(5;-3;1)$ $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{25+9+1} = \sqrt{35}$
5. Условие коллинеарности	$\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\overline{b}(b_1; b_2; b_3)$	$\overline{a}(5;6;7)$, $\overline{b}(10;12;14)$

1	2	3
векторов: векторы коллинеарны, если их соответствующие координаты пропорциональны.	$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$	$\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow$ векторы коллинеарны
6. Скалярное произведение векторов – это число равное произведению длин векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат.	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$ $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$ $\overline{a}\cdot\overline{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$	$\overline{a}(2;-3;1)$; $\overline{b}(0;1;4)$ $\overline{a}\cdot\overline{b}=2\cdot 0+(-3)\cdot 1+1\cdot 4=$ $=0-3+4=1$
7. Косинус угла между векторами.	$\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$; $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$ $\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$	
8. Условие перпендикулярности векторов: векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.	$\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$; $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$ $\overline{a}\cdot\overline{b}=0\Rightarrow\overline{a}\perp\overline{b}$ $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$	$\overline{a}(5:-2;0)$; $\overline{b}(-2;-5;0)$ $5\cdot(-2)+(-2)\cdot(-5)+0\cdot 0=$ $=0\Rightarrow\overline{a}\perp\overline{b}$

Задания практической работы

Даны точки: $A(0;-N)$, $B(N;0)$, $C(N-5;1-N)$, $D(-N-2;N+1)$, где N – номер студента по списку.

1. Найти координаты, абсолютные величины векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.
2. При каком значении m перпендикулярны векторы $\vec{a}(1;-m;-2)$ и $\vec{b}(m;2;-4)$?

3*. Проверьте, коллинеарные ли векторы $\overline{AD}$ и $\overline{CD}$?

4*. Образуют ли векторы $\overline{a}(-1;-2;N)$, $\overline{b}(3;N;-2)$, $\overline{c}(-N;0;7)$ базис?

5**. Найти угол между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

6**. Образуют ли векторы $\overline{a}(N;0;5)$, $\overline{b}(3;2;N)$, $\overline{c}(5;N;9)$ базис? Если да, то найти в нем координаты вектора $\overline{d}(-4;2;N)$.

Примечание.
Чтобы получить оценку «3», достаточно решить задания: 1-3. Для получения оценки «4», необходимо решить задания: 1-5, а для получения оценки «5», нужно выполнить все задания.

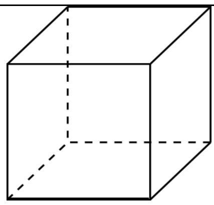
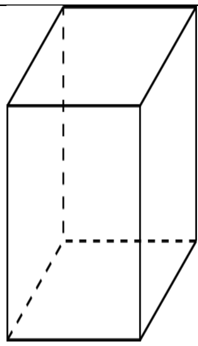
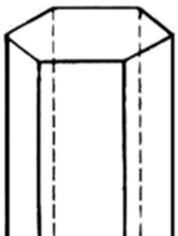
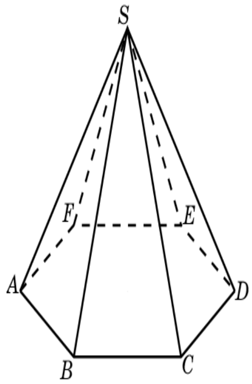
Практическая работа № 12

Тема: Многогранники.
Цель: Знать формулы вычисления боковой и полной поверхности призмы. пирамиды, параллелепипеда и уметь применять их к решению задач.

Методические рекомендации

Площадью поверхности многогранника по определению считается сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

Основные формулы

№ п/п	Наименование многогранника	Изображение	Площадь боковой и полной поверхности
1.	**Куб**		$S_п = 6a^2$ V=a^3
2.	**Прямоугольный параллелепипед**		$S_п = 2ab + 2ac + 2ac$ **V=a*b*c** **V=$S_{осн}$*h**
3.	**Призма**		$S_б = p \cdot H$ $S_п = S_б + 2S_o$ **V=$S_{осн}$*h**
4.	**Пирамида**		$S_б = \frac{1}{2} p \cdot h$ $S_п = S_б + S_o$ V=(1/3)*$S_{осн}$*h

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами 6 см и 12 см и углом 60°. Диагональ B_1D призмы образует с плоскостью основания угол в 30°. Найдите площадь полной поверхности призмы.
2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3 см, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
3. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

2 вариант

1. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами 4 см и $4\sqrt{3}$ см и углом 30°. Диагональ AC_1 призмы образует с плоскостью основания угол в 60°. Найдите площадь полной поверхности призмы.
2. Высота основания правильной треугольной пирамиды равна 3 см, а угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен 45°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
3. Основание пирамиды – квадрат со стороной a. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию, а две смежные с ней грани составляют с плоскостью основания угол α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

3 вариант

1. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами 6 см и $6\sqrt{3}$ см и углом 150°. Диагональ B_1D призмы образует с плоскостью основания угол в 60°. Найдите площадь полной поверхности призмы.
2. Сторона правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а угол между боковым ребром и основанием равен 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
3. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна H, а боковое ребро составляет с основанием угол α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

4 вариант

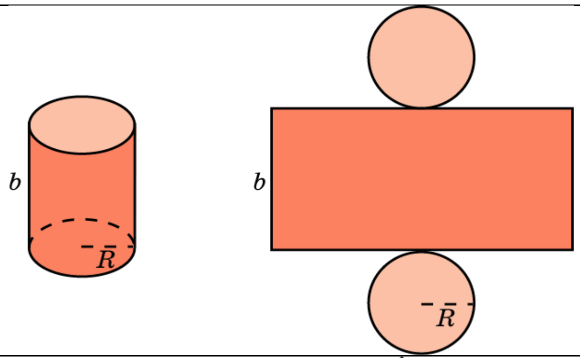
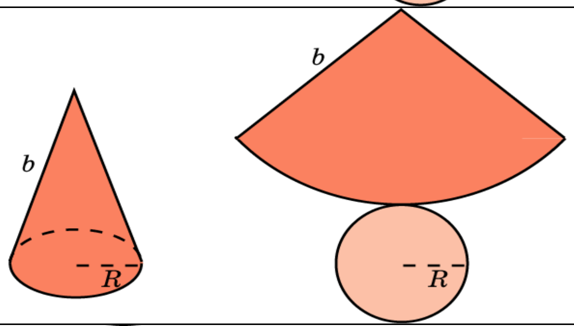
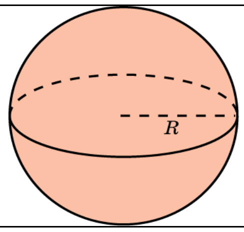
1. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами 3 см и 6 см и углом 120°. Диагональ AC_1 призмы образует с плоскостью основания угол в 30°. Найдите площадь полной поверхности призмы.

2. Высота основания правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а угол между боковым ребром и основанием пирамиды равен 30°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
3. Основание прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Угол между диагоналями смежных граней, исходящих из одной вершины, равен α. Диагональ параллелепипеда равна d. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

Практическая работа № 13

Тема: Тела вращения.
Цель: Знать формулы для нахождения площадей поверхностей тел вращения и уметь применять их к решению задач.

Методические рекомендации

№ п/п	Наименование фигуры	Изображение	Формула площадей полной и боковой поверхности
1.	**Цилиндр**		$S_б = 2\pi RH$ $S_п = 2\pi RH + 2\pi R^2$ $S_o = \pi R^2$ $V = \pi R^2 \cdot H$
2.	**Конус**		$S_б = \pi Rl$ $S_п = \pi Rl + \pi R^2$ $S_o = \pi R^2$ $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$
3.	**Сфера, шар**		$S_п = 4\pi R^2$ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, длина диагонали которого равна 20 см. Найдите радиус основания цилиндра.
   1) $5\sqrt{2}$ см; 2) $8\sqrt{2}$ см; 3) 10 см; 4) $10\sqrt{2}$ см

2. Площадь осевого сечения цилиндра равна $6\sqrt{\pi}$ дм^2, а площадь основания цилиндра равна 25 дм^2. Найдите высоту цилиндра.
   1) $\frac{2}{3}\pi$ дм; 2) $\frac{\pi}{2}$ дм; 3) $0{,}6\pi$ дм; 4) 2 дм

3. Длина образующей конуса равна $2\sqrt{3}$ см, а угол при вершине осевого сечения конуса равен 120°. Найдите площадь основания конуса.

1) 8π см^2; 2) $8\sqrt{2}\,\pi$ см^2; 3) 9π см^2; 4) $6\sqrt{3}\,\pi$ см^2

4. Радиус основания конуса $3\sqrt{2}$ см. Найдите наибольшую возможную площадь осевого сечения данного конуса.
   1) $16\sqrt{2}$ см^2; 2) 18 см^2; 3) $12\sqrt{3}$ см^2; 4) 16 см^2

5. Стороны треугольника ABC касаются шара. Найдите радиус шара, если AB =8 см, BC=10 см, AC=12 см и расстояние от центра шара O до плоскости треугольника ABC равно $\sqrt{2}$ см.
   1) $3\sqrt{3}$ см; 2) $2\sqrt{3}$ см; 3) 3 см; 4) $3\sqrt{2}$ см

2 вариант

1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, длина диагонали которого равна 36 см. Найдите радиус основания цилиндра.
   1) 9 см; 2) 8 см; 3) $8\sqrt{3}$ см; 4) $9\sqrt{2}$ см

2. Площадь осевого сечения цилиндра равна $12\sqrt{\pi}$ дм^2, а площадь основания равна 64дм^2. Найдите высоту цилиндра.
   1) $\frac{\pi}{2}$ дм; 2) $0{,}75\pi$ дм; 3) $\frac{5\pi}{6}$ дм; 4) 3 дм
3. Высота конуса равна $4\sqrt{3}$ см, а угол при вершине осевого сечения конуса равен 120°. Найдите площадь основания конуса.
   1) $120\sqrt{2}\,\pi$ см^2; 2) 136π см^2; 3) 144π см^2; 4) $24\sqrt{3}\,\pi$ см^2

4. Радиус основания конуса равен $7\sqrt{2}$ см. Найдите наибольшую возможную площадь осевого сечения данного конуса.
   1) $54\sqrt{2}$ см^2; 2) 35 см^2; 3) $21\sqrt{2}$ см^2; 4) 98 см^2

5. Стороны треугольника MKN касаются шара. Найдите радиус шара, если MK = 9 см, MN= 13 см, KN = 14 см и расстояние от центра шара O до плоскости MKN равно $\sqrt{6}$ см.
   1) $4\sqrt{2}$ см; 2) 4 см; 3) $3\sqrt{3}$ см; 4) $3\sqrt{2}$ см

Практическая работа № 14

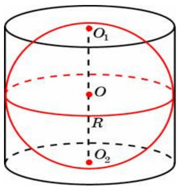
Тема: Измерения в геометрии.
Цель: Знать формулы для нахождения объемов многогранников и тел вращения и уметь их применять их к решению задач.

Методические рекомендации

При выполнении практической работы, воспользуйтесь методическими рекомендациями к практической работе № 12;13.

1 вариант

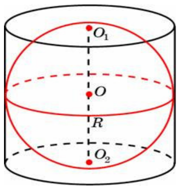
1. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 9. Объем параллелепипеда равен 81. Найдите высоту цилиндра.
2. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 8,5. Найдите его объем.
3. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 18.
4. Объем конуса равен 112. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.
5. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 18. Найдите площадь поверхности шара.



.

2 вариант

1. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 1. Объем параллелепипеда равен 5. Найдите высоту цилиндра.
2. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 6,5. Найдите его объем.
3. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 14.
4. Объем конуса равен 120. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.
5. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 24. Найдите площадь поверхности шара.



Практическая работа № 15

Тема: Элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики.

Цель: Знать формулы комбинаторики, теории вероятностей и уметь применять их при решении задач.

Методические рекомендации

Название	Формула	Примеры
1	2	3
1. Вероятность события *P(A)*	$P(A)=\dfrac{m}{n}$	В урне 3 белых и 9 черных шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется черным (событие А)? Решение. $m=9$, $n=3+9=12$ $P(A)=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$
2. Вероятность достоверного события *(U)*; вероятность невозможного события *(V)*	$P(V)=0$; $P(U)=1$	
КОМБИНАТОРИКА		
3. Размещения	$A_n^k=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$	$A_5^3=5\cdot4\cdot3=60$
4. Перестановки	$P_n=A_n^k=n!$ $n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot n$	$P_5=5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$
5. Сочетания	$C_n^k=\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$	$C_5^3=\dfrac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}=10$
6. Теорема сложения и умножения вероятностей	$P(A+B)=P(A)+P(B)$ $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$ $P(A)+P(\overline{A})=1$, где $P(\overline{A})$ - вероятность противоположного события	• Вероятность попадания снаряда в первый склад равна 0,225, во второй – 0,325. В результате детонации любое попадание взрывает оба склада. Какова вероятность того, что оба склада будут уничтожены? Решение. $P(A+B)=P(A)+P(B)=$ $=0{,}225+0{,}325=0{,}55$ • Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна $P(A)=0{,}9$, для второго стрелка равна $P(B)=0{,}7$. Найти вероятность того, что оба стрелка попадут в цель. $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}9\cdot0{,}7=$ $=0{,}63$

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>7. Формула полной вероятности</td><td>$P(A) = P(A|X_1) \cdot P(X_1) +$
$+ P(A|X_2) \cdot P(X_2) + \ldots +$
$+ P(A|X_n) \cdot P(X_n)$</td><td></td></tr>
<tr><td>8. Формула Бернулли</td><td>$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$, $q = 1 - p$</td><td>В урне 20 шаров: 15 белых и 5 черных. Вынули подряд 5 шаров, причем каждый вынутый шар возвращается в урну и перед извлечением следующего тщательно перемешиваются. Найти вероятность того, что из пяти вынутых шаров будет 2 белых.
<u>Решение.</u>
$P = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$; $q = 1 - P = \frac{1}{4}$
$P_{2,5} = C_5^2 P^2 q^{5-2} =$
$= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{45}{512}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">9. Математическое ожидание $M(X)$</td><td>$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$,
x_n - дискретная с.в.
p_n - соответствующие вероятности</td><td rowspan="2"><table><tr><td>X</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,25</td><td>0,15</td><td>0,3</td></tr></table>$M(X) = ?$
<u>Решение.</u>
$M(X) = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,25 +$
$= 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,3 = 1,25$</td></tr>
<tr><td>Свойства
1. $M(C) = C$
2. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$
3. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$
4. $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$</td></tr>
<tr><td>10. Дисперсия дискретной с.в. $D(X)$</td><td>$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$</td><td><table><tr><td>X</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>P</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,4</td></tr></table>$D(X) = ?$
$M(X) = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 +$
$+ 2 \cdot 0,4 = 0,9$
$M^2(X) = (0,9)^2 = 0,81$
$M(X^2) = (-1)^2 \cdot 0,2 + 0^2 \cdot 0,1 +$
$+ 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 = 2,1$
$D(X) = 2,1 - 0,81 = 1,29$</td></tr>
</table>

Варианты заданий практической работы

1 вариант

1. Решите уравнение: $A_x^3 = \frac{1}{20} \cdot A_x^4$
2. Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3-х человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек?

3. Брошена игральная кость. Найти вероятность:
   а) появления четного числа очков;
   б) появления не больше двух очков.
4. В партии из 15 деталей имеется 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад деталей 3 стандартные.

2 вариант

1. Решите уравнение: $30x = A_x^3$
2. Сколькими способами можно расставить 6 томов энциклопедии, чтобы они стояли в беспорядке?
3. В урне 5 белых и 10 черных шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется:
   а) черным;
   б) белым.
4. Первенство по футболу оспаривают 20 команд, среди которых 7 лидирующих. Путем жеребьевки команды распределяются на две группы по 10 команд в каждой. Какова вероятность попадания всех лидирующих команд в одну группу?

3 вариант

1. Решите уравнение: $30A_{x-2}^4 = A_x^5$
2. Из 10 кандидатов нужно выбрать 3-х на конференцию. Сколькими способами это можно сделать?
3. Брошена игральная кость. Найти вероятность:
   а) появления четного числа очков;
   б) появления не больше трех очков.
4. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

4 вариант

1. Решите уравнение: $20A_{x-2}^3 = A_x^5$
2. Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг стола?
3. Два стрелка стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,82, для второго 0,75. Найти вероятность того, что оба стрелка попадут в цель.
4. В ящике имеется 80 стандартных деталей и 20 нестандартных. Из ящика наудачу берут одну за другой две детали. Какова вероятность появления стандартной детали при первом испытании, при втором испытании?

5 вариант

1. Решите уравнение: $\frac{x}{A_x^3} = \frac{1}{12}$
2. Бригадир должен отправить на работу 4 человек. Сколькими способами это можно сделать, если бригада состоит из 10 человек?
3. В урне 20 шаров. 17 белых и 3 черных. Вынули подряд 5 шаров, причем каждый вынутый шар возвращается в урну и перед извлечением следующего, шары в урне тщательно перемешиваются. Найти вероятность того, что из пяти вынутых шаров три белых.
4. Найти математическое ожидание с.в. X, если закон ее распределения задан таблицей:

x_i	1	2	3	4
P_i	0,3	0,1	0,2	0,4

6 вариант

1. Решите уравнение: $4C_{x+2}^{x-1} = A_x^3$
2. Сколькими способами можно расставить 5 томов, чтобы они стояли в беспорядке?
3. В учебных мастерских на станках a, b и c изготавливают соответственно 30 %, 45 % и 25 % всех деталей. В их продукции брак составляет соответственно 13 %, 11 % и 5 %. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь дефектна.
4. Найти дисперсию дискретной с.в. X, зная закон ее распределения:

x_i	0	1	2	3	4
P_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Д. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2014. – 271 с.
2. Александров А.Д. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия 11 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2014. – 272 с.
3. Башмаков М.И. Математика. Задачник : учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – 4-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия» , 2014. – 416 с.
4. Башмаков М.И. Математика : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – 9-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2014. – 256 с.
5. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М. : Просвещение, 2014. – 431 с.
6. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М. : Просвещение, 2014. – 464 с.
7. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. – М. : просвещение, 2014. – 255 с.
8. Богомолов Н.В. «Практические занятия по математике» / Н.В. Богомолов - М., 2008.