

Практическое занятие №9

Тема: «Вычисление интегралов при помощи формул Гаусса»

Цель: получение практических навыков численного интегрирования при помощи квадратурной формулы Гаусса

Предварительная подготовка: изучить материал параграфа «Квадратурная формула Гаусса» (по конспекту).

Количество часов: 2 часа

Оборудование: калькулятор.

Краткая теория

Квадратурная формула Гаусса $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n C_i \cdot f(z_i)$, где $z_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i$,

а значения квадратурных коэффициентов Гаусса C_i и абсцисс x_i приведены в таблице

n=1	$x_1 = 0,5$	$c_1 = 2$
n=2	$-x_1 = x_2 = 0,577350$	$c_1 = c_2 = 1$
n=3	$-x_1 = x_3 = 0,774597$ $x_2 = 0$	$c_1 = c_3 = 0,555555$ $c_2 = 0,888889$
n=4	$-x_1 = x_4 = 0,861136$ $-x_2 = x_3 = 0,339981$	$c_1 = c_4 = 0,347855$ $c_2 = c_3 = 0,652145$
n=5	$-x_1 = x_5 = 0,906180$ $-x_2 = x_4 = 0,538470$ $x_3 = 0$	$c_1 = c_5 = 0,236927$ $c_2 = c_4 = 0,478629$ $c_3 = 0,568889$
n=6	$-x_1 = x_6 = 0,932470$ $-x_2 = x_5 = 0,661210$ $-x_3 = x_4 = 0,238620$	$c_1 = c_6 = 0,171324$ $c_2 = c_5 = 0,360761$ $c_3 = c_4 = 0,467914$
n=7	$-x_1 = x_7 = 0,949108$ $-x_2 = x_6 = 0,741531$ $-x_3 = x_5 = 0,405845$ $x_4 = 0$	$c_1 = c_7 = 0,129485$ $c_2 = c_6 = 0,279705$ $c_3 = c_5 = 0,381830$ $c_4 = 0,417960$

Пояснение к работе

Задание. Вычислить интеграл по формуле Гаусса, применяя для оценки точности двойной пересчет (при $n_1=4$ и $n_2=5$).

$$I = \int_{1,6}^{2,7} \frac{x+0,8}{\sqrt{x^2+1,2}} dx.$$

В данном примере $z_i = \frac{2,7+1,6}{2} + \frac{2,7-1,6}{2} x_i = 2,15 + 0,55x_i$, а значения C_i и x_i берем из таблицы

квадратурных коэффициентов Гаусса. Вычисления удобно располагать в таблице.

При $n = 4$ имеем:

C_i	x_i	$z_i = 2,15 + 0,55x_i$,	$f(z_i) = \frac{z_i+0,8}{\sqrt{z_i^2+1,2}}$	$C_i f(z_i)$
0,34785	-0,86114	1,6764	1,2366	0,43015
0,65215	-0,33998	1,9630	1,2291	0,80155
0,65215	0,33998	2,3370	1,2154	0,79264
0,34785	0,86114	2,6236	1,2042	0,41887
				$\sum = 2,44321$

Следовательно, $I \approx 0,55 \cdot 2,44321 = 1,3438$.

При $n=5$ имеем

C_i	x_i	$z_i = 2,15 + 0,55x_i,$	$f(z_i) = \frac{z_i + 0,8}{\sqrt{z_i^2 + 1,2}}$	$C_i f(z_i)$
0,23693	-0,90618	1,6516	1,2370	0,2903
0,47863	-0,538469	1,8538	1,2324	0,58988
0,56889	0	2,1500	1,2225	0,69549
0,47863	0,538469	2,4462	1,2111	0,57968
0,23693	0,90618	2,6484	1,2032	0,28508
				$\Sigma = 2,44321$

Значит, $I \approx 0,55 \cdot 2,44321 = 1,3438$. Совпадение результатов свидетельствует о правильности вычислений.

Ответ: при $n=4$ интеграл равен $I \approx 1,3438$; при $n=5$ интеграл равен $I \approx 1,3438$

Задание

Задание. Вычислить интеграл по формуле Гаусса, применяя для оценки точности двойной пересчет (при $n_1=4$ и $n_2=5$).

Вариант	Задание	Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$\int_{-0,5}^{1,3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$;	2	$\int_{-2,5}^{-1,3} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1,8}}$;	3	$\int_2^{3,2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$;
4	$\int_{0,5}^{1,6} \frac{x^2 + 0,5}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$;	5	$\int_{0,6}^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$;	6	$\int_{2,2}^{3,4} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1}}$;
7	$\int_{1,2}^2 \frac{x-0,5}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$;	8	$\int_{0,2}^{1,11} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 2,5} dx$;	9	$\int_{2,2}^{3,8} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$;
10	$\int_{0,2}^{2,4} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x+2} dx$;	11	$\int_{0,4}^{1,8} \frac{x^2 + 1,4}{\sqrt{x^2 + 0,2}} dx$;	12	$\int_1^{2,6} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 3}}$;
13	$\int_{0,8}^{1,6} \frac{0,5x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$;	14	$\int_{0,8}^{1,5} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 2,4}}$;	15	$\int_{-0,4}^{1,6} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$;
16	$\int_{-0,8}^{1,4} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$;	17	$\int_{-0,4}^{1,8} \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$;	18	$\int_{2,6}^{3,4} \frac{x+0,5}{\sqrt{x^2 + 1,5}} dx$;
19	$\int_{0,8}^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 2}}$;	20	$\int_{1,6}^{2,8} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1,2}}$;	21	$\int_{2,4}^{3,2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+2}}$;
22	$\int_{0,2}^2 \frac{x+0,5}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$;	23	$\int_{0,6}^{1,8} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1,7}}$;	24	$\int_{0,7}^{1,5} \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$;
25	$\int_{0,2}^{2,5} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x+2} dx$;	26	$\int_{2,2}^{2,8} \frac{(4-x)dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$;	27	$\int_{1,4}^{2,6} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 2,5}}$;
28	$\int_{2,2}^{3,4} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}}$;	29	$\int_{0,4}^{1,7} \frac{x+2,2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.	30	$\int_{0,4}^{1,6} \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$;

Отчет должен содержать

1. Название, цель и задание работы.
2. Подробное решение задания.
3. Ответ, содержащий обоснование полученных результатов и выводов.

Контрольные вопросы

1. Общая постановка задачи численного интегрирования.
 Геометрический смысл определенного интеграла
 Квадратурная формула Гаусса.