Практическое занятие №7

Тема: «Вычисление интегралов при помощи формул Ньютона-Котеса»

Цель: получение практических навыков численного интегрирования при помощи формул Ньютона-Котеса

Предварительная подготовка: изучить материал параграфов «Простейшие квадратурные формулы» и «Обобщенная формула Ньютона-Котеса» (по конспекту).

Количество часов: 2 часа

Оборудование: калькулятор.

Краткая теория

Метод прямоугольников $I_{лев} = \int\limits_a^b f(x)dx \approx h\sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i$; $I_{пр} = \int\limits_a^b f(x)dx \approx h\sum\limits_{i=1} y_i$

Метод трапеций $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_0 + y_n}{2}\right]$

Метод Симпсона $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2})\right]$

Метод “3/8” $\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) - правило\_трех\_восьмых$

Пояснение к работе

Задание. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{1,2}^{3,36} \frac{(1+0,4x^2)dx}{2+\sqrt{0,5x^2+1,3}}$ при n=12:

1) по формулам левых и правых прямоугольников;
2) по форуме трапеций;
3) по формуле Симпсона;
4) по формуле «трех восьмых».

Решение:

Для вычисления при n=12 разобьем отрезок интегрирования на 12 частей с шагом $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3,36-1,2}{12} = 0,18$.

Составим таблицу значений подынтегральной функции в точках деления отрезка:

i	x_i	$y = \frac{(1+0,4x^2)}{2+\sqrt{0,5x^2+1,3}}$
0	1,2	0,46065
1	1,38	0,50325
2	1,56	0,55025
3	1,74	0,60124
4	1,92	0,65588
5	2,10	0,71381
6	2,28	0,77475
7	2,46	0,83842
8	2,64	0,90458
9	2,82	0,97300
10	3,00	1,04348
11	3,18	1,11586
12	3,36	1,18996

1. Вычислим интеграл по формуле левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=0}^{11} y_i = 0{,}18 \cdot 9{,}1352 \approx 1{,}6443$$

Вычислим интеграл по формуле правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{12} y_i = 0{,}18 \cdot 9{,}8645 \approx 1{,}7756$$

За окончательное значение примем полусумму найденных значений:

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{I}_л + \mathrm{I}_п}{2} = \frac{1{,}6443 + 1{,}7756}{2} \approx 1{,}7100$$

2. Вычислим интеграл по формуле трапеций $\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_{12}}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{11}\right)$

Таким образом, $\mathrm{I} = 0{,}18\left(\frac{0{,}6506}{2} + 8{,}6745\right) = 0{,}18 * 9{,}4998 \approx 1{,}7100$

3. Вычислим интеграл по формуле Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{12} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})\right)$$

Следовательно, $\mathrm{I} \approx \frac{0{,}18}{3}(1{,}6506 + 4 \cdot 4{,}7456 + 2 \cdot 3{,}9289) = \frac{0{,}18}{3} \cdot 28{,}4908 \approx 1{,}7095$

4. Вычислим интеграл по формуле «трех восьмых» $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left(\sum_1 + 3\sum_2 + 2\sum_3\right)$

где $\sum_1 = y_0 + y_{12}$; $\sum_2 = y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_7 + y_8 + y_{10} + y_{11}$; $\sum_3 = y_3 + y_6 + y_9$

Следовательно, $\mathrm{I} = \frac{3 \cdot 0{,}18}{8}(1{,}65061 + 3 \cdot 6{,}32553 + 2 \cdot 2{,}34899) = \frac{3 \cdot 0{,}18}{8} \cdot 25{,}3252 \approx 1{,}7095$.

Ответ: 1) $\mathrm{I} \approx 1{,}7100$ 2) $\mathrm{I} \approx 1{,}7100$ 3) $\mathrm{I} \approx 1{,}7095$ 4) $\mathrm{I} \approx 1{,}7095$

Задание

Задание. Вычислить интеграл при n=12:

1) по формулам левых и правых прямоугольников;
2) по форуме трапеций;
3) по формуле Симпсона;
4) по формуле «трех восьмых».

Вариант	Задание	Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$\int_{0,6}^{2,4}\frac{(1+0{,}5x^2)dx}{1+\sqrt{0.8x^2+1.4}}$	2	$\int_{0.5}^{2.66}\frac{(1+0.3x^2)dx}{1.2+\sqrt{0.6x^2+1.2}}$	3	$\int_{0.4}^{2.56}\frac{(1+0.5x^2)dx}{1.2+\sqrt{0.6x^2+1.5}}$
4	$\int_{0,8}^{2,96}\frac{(1+0{,}7x^2)dx}{1.5+\sqrt{2x^2+0.3}}$	5	$\int_{0,9}^{2,34}\frac{(1+0{,}9x^2)dx}{1.3+\sqrt{0.5x^2+1}}$	6	$\int_{1.1}^{2.9}\frac{(1+0.4x^2)dx}{0.7+\sqrt{1.1x^2+1.2}}$
7	$\int_{1..3}^{2.74}\frac{(1+0.6x^2)dx}{0.9+\sqrt{x^2+1.5}}$	8	$\int_{1.1}^{2.9}\frac{(1+0.7x^2)dx}{0.4+\sqrt{x^2+1.5}}$	9	$\int_{0.9}^{2.34}\frac{(1+0.7x^2)dx}{0.8+\sqrt{0.4x^2+1.3}}$
10	$\int_{0.7}^{2.5}\frac{(1+1.5x^2)dx}{0.5+\sqrt{x^2+0.8}}$	11	$\int_{0.8}^{2.6}\frac{(1+1.5x^2)dx}{0{,}7+\sqrt{2.2x^2+0.5}}$	12	$\int_{0.5}^{2.66}\frac{(1+0.6x^2)dx}{1.4+\sqrt{0.6x^2+1.5}}$
13	$\int_{1}^{3.16}\frac{(1+0.6x^2)dx}{1.5+\sqrt{0.4x^2+2.5}}$	14	$\int_{1.2}^{2.64}\frac{(1+1.2x^2)dx}{0.8+\sqrt{x^2+1.3}}$	15	$\int_{1.3}^{2.74}\frac{(1+0.6x^2)dx}{1.9+\sqrt{0.7x^2+1.5}}$
16	$\int_{1,4}^{2,84}\frac{(1+0{,}4x^2)dx}{1.2+\sqrt{1.2x^2+1}}$	17	$\int_{1.3}^{3.46}\frac{(1+1.2x^2)dx}{2.3+\sqrt{0.4x^2+3.2}}$	18	$\int_{0.7}^{2.5}\frac{(1+0.5x^2)dx}{1.5+\sqrt{2x^2+0.4}}$

19	$\int_{1,2}^{2,64}\frac{(1+0,2x^2)dx}{0.7+\sqrt{0.5x^2+1.2}}$	20	$\int_{0,4}^{2,56}\frac{(1+0,3x^2)dx}{0.8+\sqrt{0.6x^2+1.3}}$	21	$\int_{1}^{3.16}\frac{(1+0.8x^2)dx}{1.3+\sqrt{0.4x^2+2.1}}$
22	$\int_{0.5}^{2.3}\frac{(1+1.2x^2)dx}{1.2+\sqrt{0.6x^2+1.3}}$	23	$\int_{1.3}^{3.46}\frac{(1+0.9x^2)dx}{1.5+\sqrt{0.4x^2+0.7}}$	24	$\int_{1.4}^{2.84}\frac{(1+0.8x^2)dx}{1.5+\sqrt{0.4x^2+1}}$
25	$\int_{1.2}^{2.64}\frac{(1+0.4x^2)dx}{0.8+\sqrt{0.7x^2+1.3}}$	26	$\int_{0.6}^{2.4}\frac{(1+0.4x^2)dx}{1.3+\sqrt{0.8x^2+0.4}}$	27	$\int_{1.2}^{2.64}\frac{(1+0.3x^2)dx}{0.9+\sqrt{1.2x^2+0.5}}$
28	$\int_{0.8}^{2.6}\frac{(1+0.9x^2)dx}{0.7+\sqrt{1.2x^2+0.5}}$	29	$\int_{0.8}^{2.96}\frac{(1+0.6x^2)dx}{1.4+\sqrt{2x^2+0.5}}$	30	$\int_{0,8}^{1,6}\frac{\sqrt{2x+1,6}dx}{1,8+\sqrt{0,3x^2+2,3}}$;

Отчет должен содержать

1. Название, цель и задание работы.
2. Подробное решение задания.
3. Ответ, содержащий обоснование полученных результатов и выводов.

Контрольные вопросы

1. Общая постановка задачи численного интегрирования.
2. Геометрический смысл определенного интеграла
3. Формулы левых и правых прямоугольников.
4. Формула трапеций
5. Формула Симпсона
6. Формула «трех восьмых»