

Лабораторная работа № 5

Тема: «Транспортная задача. Метод дифференциальных рент»

Цель работы: Получить практические навыки решения транспортной задачи методом дифференциальных рент.

Предварительная подготовка: спец. дисциплина «Математические методы»

Количество часов: 2 часа

Краткая теория:

Алгоритм метода дифференциальных рент

При нахождении решения транспортной задачи методом дифференциальных рент сначала наилучшим образом распределяют между пунктами назначения часть груза и на последующих итерациях постепенно уменьшают общую величину нераспределённых поставок. Первоначальный вариант распределения груза определяется следующим образом:

1. В каждом из столбцов таблицы данных транспортной задачи находят минимальный тариф;
2. Найденные числа заключают в кружки, а клетки, в которых стоят указанные числа заполняют. В них записывают максимально возможные числа;
3. В результате получают некоторые распределения поставок груза в пункты назначения. Это распределение в общем случае не удовлетворяет ограничениям исходной транспортной задачи. Поэтому в результате последующих шагов следует постепенно сокращать нераспределённые поставки груза так, чтобы при этом общая стоимость перевозок оставалась минимальной. Для этого сначала определяют избыточные и недостаточные строки.

Строки, соответствующие поставщикам, запасы которых полностью распределены, а потребности пунктов назначения, связанных с данными потребителями, запланированными поставками, не удовлетворены, считаются недостаточными. Эти строки иногда называют также отрицательными. Строки, запасы которых исчерпаны не полностью, считаются избыточными или положительными.

Пример Составить оптимальный план перевозок грузов методом дифференциальных рент с наименьшей общей стоимостью от трёх поставщиков $A_i (i = 1, 2, 3)$ соответственно в количествах 560, 570 и 620 единиц к пяти потребителям $B_j (j = 1, 2, 3, 4, 5)$ соответственно, в количествах 250, 300, 350, 500 и 250 единиц. Исходные данные приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1

Поставщики	Пункты назначения					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	3	10	15	17	9	560
A2	2	16	3	15	4	570
A3	8	5	12	14	7	620
Потребители	250	300	350	500	250	

Переходим от таблицы 5.1 к таблице 5.2

Таблица 5.2

Поставщики	Пункты назначения					Запасы	+ -
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	3	10	15	17	9 250	560	+310
A2	2 250	16	3 320	15	4	570	-
A3	8	5 300	12	14 320	7	620	-
Потребители	250	300	350	500	250		
	1	5	12	3	-		

В каждом из столбцов таблицы 5.2 находим минимальные тарифы и закрашиваем их. Заполняем клетки, в которых стоят указанные числа. Для этого в каждую из клеток записываем максимально допустимое число. Например, в клетку, находящуюся на пересечении строки A₂ и столбца B₁, записываем число 250. В эту клетку нельзя поместить большее число, поскольку в таком случае были бы превышены потребности пункта назначения B₁.

В результате заполнения отмеченных выше клеток получен так называемый условно оптимальный план, согласно которому полностью удовлетворяются потребности пунктов назначения B₁, B₂, B₃, B₄ и B₅. При этом полностью распределены запасы пунктов отправления A₁, A₂ и A₃.

После получения условно оптимального плана определяем избыточные и недостаточные строки. Здесь недостаточной являются строки A₂ и A₃, так как запасы пунктов отправления A₂ и A₃ полностью использованы.

После определения избыточных и недостаточных строк по каждому из столбцов находим разности между минимальными тарифами, записанными в избыточных строках, и тарифами, стоящими в заполненных клетках. В данном случае эти разности равны:

- для столбца B₁ = 3 - 2 = 1;
- для столбца B₂ = 10 - 5 = 5;
- для столбца B₃ = 15 - 3 = 12;
- для столбца B₄ = 17 - 14 = 3;
- для столбца B₅ = 9 - 9 = 0.

Выбираем наименьшую разность, которая является промежуточной рентой. В данном случае промежуточная рента равна 1 и находится в столбце B₁. После того как вычислена промежуточная рента, переходим к таблице 5.3.

В таблице 5.3 строку A₁ (являющейся избыточной) заполняем соответствующими тарифами из строки A₁ таблицы 5.2. Элементы строк A₂ и A₃ (являющиеся недостаточными) получают в результате прибавления к соответствующим тарифам, находящимся в строках A₂ и A₃ таблицы 5.3, промежуточной ренты, т.е. 1.

Таблица 5.3

Поставщики	Пункты назначения					Запасы	+ -
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	3 250	10	15	17	9	560	+310
A2	3	16	4 350	15 180	4 40	570	-
A3	8	6 300	12	15 320	7	620	-
Потребители	250	300	350	500	250		
	-	4	11	2	5		

В таблице 5.4 строку A_1 (являющейся избыточной) заполняем соответствующими тарифами из строки A_1 таблицы 2.3. Элементы строк A_2 и A_3 (являющиеся недостаточными) получаются в результате прибавления к соответствующим тарифам, находящимся в строках A_2 и A_3 таблицы 5.4, промежуточной ренты, т.е. 2.

Таблица 5.4

Поставщики	Пункты назначения					Запасы	+ -
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	5	10	15	17 180	9 250	560	+130
A2	3 250	16	6 320	17	6	570	-
A3	8	8 300	12	17 320	7	620	-
Потребители	250	300	350	500	250		
	2	2	9	-	-		

В таблице 5.5 строку A_1 (являющейся избыточной) заполняем соответствующими тарифами из строки A_1 таблицы 5.4. Элементы строк A_2 и A_3 (являющиеся недостаточными) получаются в результате прибавления к соответствующим тарифам, находящимся в строках A_2 и A_3 таблицы 5.5, промежуточной ренты, т.е. 2.

Таблица 5.5

Поставщики	Пункты назначения					Запасы	+ -
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	5 250	10	15	19	11	560	+310
A2	5	16	8 350	17 220	6	570	-
A3	8	10 300	12	19	7 250	620	+70
Потребители	250	300	350	500	250		
	3	-	4	2	4		

В таблице 5.6 строки A_1 и A_3 (являющиеся избыточными) заполняем соответствующими тарифами из строки A_1 и A_3 таблицы 2.5. Элементы строки A_2 (являющейся недостаточной) получаются в результате прибавления к соответствующим тарифам, находящиеся в строке A_2 таблицы 5.6, промежуточной ренты, т.е. 2.

Таблица 5.6

Поставщики	Пункты назначения					Запасы	+ -
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	5 250	10 300	15	19 10	11	560	-
A2	5	16	10 350	19 220	6	570	-
A3	8	10	12	19 270	7 250	620	+100
Потребители	250	300	350	500	250		
	3	-	2	-	-		

В таблице 5.7 строки A_3 (являющейся избыточной) заполняем соответствующими тарифами из строки A_3 таблицы 5.6. Элементы строк A_1 и A_2 (являющиеся недостаточными) получаются в результате прибавления к соответствующим тарифам, находящиеся в строке A_2 и A_3 таблицы 5.6, промежуточной ренты, т.е. 2.

Таблица 5.7

Поставщики	Пункты назначения					Запасы	+ -
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	7	12	15	21 210	10 250	560	-
A2	8	16	12 280	21 290	8	570	-
A3	8 250	10 300	12 70	19	7	620	-
Потребители	250	300	350	500	250		

В таблице 5.7 элементы строк A₁ и A₂ получены в результате прибавления к соответствующим числам строк A₁ и A₂ (являющихся недостаточными) таблицы 5.7 промежуточной ренты. Определяем указанные клетки и заполняем их. В результате все имеющиеся запасы поставщиков распределяются в соответствии с фактическими потребностями пунктов назначения. Число заполняемых клеток равно семи, и все они имеют наименьший показатель C_{ij}. Следовательно, получен оптимальный план исходной транспортной задачи:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 210 & 250 \\ 0 & 0 & 280 & 290 & 0 \\ 250 & 300 & 70 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

При этом плане перевозок общие затраты таковы:

$$F(x) = 250 \cdot 8 + 100 \cdot 5 + 150 \cdot 12 + 280 \cdot 19 + 290 \cdot 15 + 210 \cdot 17 + 250 \cdot 9 = 12540$$

Задание: Решить задачу оптимального планирования выпуска продукции.

В трех хранилищах A1, A2, A3 имеется соответственно a1, a2, a3 тонн топлива. Требуется спланировать перевозку топлива пяти потребителям B1, B2, B3, B4, B5, спрос которых равен соответственно b1, b2, b3, b4, b5 тонн, так, чтобы затраты на транспортировку были минимальны. Тарифы перевозок представлены в виде матрицы C_{ij} .

Конкретные данные приведены в нижеследующей таблице.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a1	300	120	300	150	120	175	260	250	370	560	350	400	300
a2	400	150	400	170	180	165	400	300	450	570	350	370	150
a3	900	100	900	260	230	180	240	270	430	620	300	380	250
b1	250	65	250	100	70	90	180	120	300	250	180	250	150
b2	300	90	300	90	120	120	200	200	230	300	220	200	100
b3	350	60	350	160	105	110	190	190	330	350	230	290	150
b4	500	70	500	150	125	130	230	230	290	500	270	260	100
b5	200	85	200	80	110	70	100	80	100	250	100	250	200
c11	2	7	2	2	14	12	3	2	21	3	11	2	20
c12	4	4	4	10	8	9	8	4	18	10	4	4	3
c13	5	15	5	15	17	7	7	11	14	15	15	5	9
c14	7	9	7	14	5	11	11	5	3	17	7	11	15
c15	9	14	9	4	3	6	15	3	6	9	2	3	35
c21	1	11	1	3	21	4	14	8	7	2	20	12	14
c22	6	2	6	7	10	3	3	17	11	16	9	8	10
c23	3	7	3	12	7	12	1	13	10	3	7	6	12
c24	5	3	5	5	11	2	8	7	5	15	14	14	20
c25	4	10	4	8	6	8	6	6	12	4	5	11	46
c31	6	4	6	21	3	5	9	14	4	8	18	10	25
c32	3	5	3	18	5	17	5	10	8	5	10	15	11
c33	2	12	2	6	8	9	16	5	12	12	3	7	16
c34	1	8	1	13	4	4	7	8	8	14	8	9	19
c35	10	17	10	16	9	11	12	9	13	7	6	18	48

Вариант	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
а1	180	250	200	120	210	170	250	225	150	1000	300	350
а2	100	125	100	100	140	120	200	250	200	4000	400	400
а3	220	225	200	180	150	110	150	225	150	2000	900	950
в1	100	120	80	70	80	90	75	150	80	450	250	250
в2	60	110	100	110	120	60	125	110	110	650	300	300
в3	90	80	70	80	90	100	150	135	60	3200	350	350
в4	70	90	130	100	110	80	50	85	140	500	500	500
в5	80	100	120	140	100	70	200	120	110	2200	250	300
с11	7	12	7	7	7	11	11	11	21	2	21	21
с12	3	42	20	20	20	7	7	7	4	4	9	10
с13	9	15	3	3	3	3	20	20	12	5	8	8
с14	15	17	15	9	9	9	3	3	7	7	3	19
с15	35	9	35	35	15	15	15	15	9	9	2	9
с21	14	16	3	3	3	12	12	12	11	1	11	17
с22	10	60	16	14	14	3	3	3	16	6	6	9
с23	12	13	10	10	10	10	14	14	3	3	32	15
с24	20	15	20	12	12	12	10	10	5	5	5	22
с25	46	4	41	42	20	20	20	20	13	4	12	1
с31	15	16	15	15	15	19	18	18	15	6	6	23
с32	11	34	25	31	25	15	15	15	3	3	3	9
с33	14	22	11	21	11	11	25	25	2	2	21	11
с34	17	14	19	16	16	16	11	11	10	1	11	10
с35	39	10	40	47	19	19	15	15	10	10	10	12

Контрольные вопросы

1. Сформулировать постановку транспортной задачи.
2. Записать условие баланса транспортной задачи.
3. Какие решения транспортной задачи называются вырожденными, а какие не вырожденными?
4. Какие строки называют недостаточными, а какие - избыточными?
5. Как рассчитываются промежуточные ренты?
6. Алгоритм метода дифференциальных рент.