Практическое занятие №5

Тема: «Решение алгебраических и трансцендентных уравнений приближенными методами»

Цель: получение практических навыков решение алгебраических и трансцендентных уравнений приближенными методами – комбинированный метод, метод итераций

Предварительная подготовка: изучить материал параграфов «Отделение корней уравнения», «Комбинированный метод хорд и касательных», «Метод итераций»(по конспекту).

Количество часов: 2 часа

Оборудование: калькулятор.

<u>Краткая теория</u>

Процесс нахождения приближенных значений корней уравнения разбивается на два этапа

1) отделение корней
2) уточнение корней до заданной степени точности

Отделить корень – это значит разбить всю ОДЗ на отрезки, в каждом из которых содержится один корень. Отделение можно произвести двумя способами – графически и аналитически.

Исследование алгебраических уравнений

Число корней у трансцендентных уравнений может быть произвольным, а число корней алгебраического уравнения может быть определен заранее.

Пусть дано алгебраическое уравнение вида

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n = 0$$

Уравнение считается полным, если все коэффициенты a_i не равны 0, т.е. при всех степенях x есть ненулевой коэффициент.

Уравнение считается неполным, если хотя бы один коэффициент при какой-либо степени x равно 0.

Если уравнение полное, то количество положительных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов. Количество отрицательных корней равно количеству постоянств знака у соседних элементов.

Если уравнение неполное, то количество положительных корней считается так же как для полного, а для подсчета количества отрицательных корней необходимо подсчитать перемены знака у соседних коэффициентов при замене x на «-x».

Комбинированный метод

Если $f'(x) * f''(x) > 0$, то со стороны конца a лежат приближенные значения корня, полученные по методу хорд, а со сторон конца b значения, полученные по методу касательных

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} \qquad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}$$

Если $f'(x) * f''(x) < 0$, то со стороны конца a лежат приближенные значения корня, полученные по методу касательных, а со сторон конца b значения, полученные по методу хорд

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \qquad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

Метод итераций

Заменим уравнение $f(x) = 0$ равносильным ему уравнением $x = \varphi(x)$. (1)

Выберем каким-либо способом $x_0 \in [a,b]$ и подставим его в правую часть уравнения (1); тогда получим $x_1 = \varphi(x_0)$. Затем это значение x_1 подставим снова в правую часть уравнения (1) и получим $x_2 = \varphi(x_1)$. Повторяя этот процесс, получаем последовательность чисел $x_n = \varphi(x_{n-1})$. Здесь могут встретится два случая:

1) последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сходится, т.е. имеет предел, и тогда этот предел будет корнем уравнения $f(x) = 0$

2) последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n$ расходится, т.е. не имеет предела.

Теорема. Пусть на отрезке [a;b] имеется единственный корень уравнения $x = \varphi(x)$ и во всех точках этого отрезка первая производная f'(x) удовлетворяет неравенству $|\varphi'(x)| \le q < 1$. Если при этом выполняется и условие $a \le \varphi(x) \le b$, то итерационный процесс сходится, а за нулевое приближение x0 можно взять любое число из отрезка [a;b].

Пояснение к работе

Задание А. Отделить корни уравнения и уточнить один из них комбинированным методом с точностью до 0,01. $x^3+3x^2-24x+1=0$

Решение.

1. Исследуем алгебраическое уравнение.

Уравнение степени n=3, следовательно, уравнение имеет 3 или 1 корней.

Количество положительных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов. Перемен знака 2, следовательно, положительных корней 2 или ни одного.

Так как уравнение полное, количество отрицательных корней равно количеству постоянств знака у соседних элементов. Следовательно, 1 отрицательный корень.

2. Отделим корни уравнения.

Полагая $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 1$, имеем $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$.

Найдем корни производной: $3x^2 + 6x - 24 = 0 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -4$

Следовательно, корни уравнения находятся на отрезках $[-\infty;-4]\cup[-4;2]\cup[2;+\infty]$.

Уменьшим промежутки, в которых находятся корни:

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-127	-27	37	71	81	73	53	27	1	-19	-27	-17	17
Sign f(x)	-	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-

Следовательно, $x_1 \in [-7;-6]$; $x_2 \in [0;1]$; $x_3 \in [3;4]$.

3. Уточним корень уравнения на отрезке [-7;-6]

Для определения формулы определим: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 > 0$, $f''(x) = 6x - 24 < 0$, т.к. $f'(x) * f''(x) < 0$, следовательно, для расчетов применяем формулы

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \qquad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

n	a_n / b_n	bn-an	f(an) / f(bn)	f'(an)	f(bn)-f(an)	Δan / Δbn
0	-7	1	-27	81	64	0,333
	-6		37			-0,578
1	-6,667	0,089	-1,986	69,345	6,038	0,029
	-6,578		4,052			-0,060
2	-6,38	0				
	6,638					

Ответ: $\xi_1 = -6{,}638$

Задание Б. Отделить корни уравнения и уточнить один из них методом итераций с точностью до 0,01. $5x^3-20x+3=0$

Решение.

1. Исследуем алгебраическое уравнение.

Уравнение степени n=3, следовательно, уравнение имеет 3 или 1 корней.

Количество положительных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов. Перемен знака 2, следовательно, положительных корней 2 или ни одного.

Так как уравнение неполное, количество отрицательных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов при замене x на -z. Следовательно, уравнение примет вид $-5z^{3+}20z+3=0$, значит уравнение имеет 1 отрицательный корень.

2. Отделим корни уравнения.

Полагая $f(x) = 5x^3 - 20x + 3$, имеем $f'(x) = 3x^2 - 20$.

Найдем корни производной: $3x^2 - 20 = 0 \quad x_{1,2} = \pm 6{,}67$

Следовательно, корни уравнения находятся на отрезках $[-\infty;-6{,}67]\cup[-6{,}67;6{,}67]\cup[6{,}67;+\infty]$.

Уменьшим промежутки, в которых находятся корни:

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-2397	-1572	-957	-522	-237	-72	3	18	3	-12	3	78	243
sing f(x)	-	-	-	-	-	-	+	+	+	-	+	+	+

$\Rightarrow \xi_1 \in [-3;-2], \quad \xi_2 \in [0;1], \quad \xi_3 \in [1;2]$

3. Уточним корень на отрезке $\xi \in [0;1]$

Уравнение необходимо привести к виду $x = \varphi(x)$. Это можно сделать несколькими способами

а) $x=x+(5x^3-20x+3)$, следовательно, $\varphi_1(x) = 5x^3 - 19x + 3$

б) $x = \dfrac{5x^3+3}{20}$, следовательно, $\varphi_2(x) = \dfrac{5x^3+3}{20}$

Определим, какой из полученных функций следует воспользоваться для вычислений.

$$\left|\varphi_1'(x)\right| = \left|15x^2 - 19\right| > 1 \text{ на отрезке } [0,1]$$

$$\left|\varphi_2'(x)\right| = \left|\frac{15x^2}{20}\right| < 1 \text{ на отрезке } [0,1]$$

Следовательно, следует воспользоваться функцией $\varphi_2(x) = \dfrac{5x^3+3}{20}$ и искать последовательные приближения методом итераций по формуле

$$x_n = \frac{5x_{n-1}^3 + 3}{20}$$

За начальное приближение возьмем $\max \varphi'(x)$ на $[0,1]$, т.е. $x_0=0{,}75$

n	$x_n = \dfrac{5x_{n-1}^3+3}{20}$
0	0.75
1	0,25547
2	0,15417
3	0,15092
4	0,15086
5	0,15086

Ответ: $\xi = 0{,}15086$

Задание

Отделить корни уравнения и уточнить один из них с точностью до 0,001

А) комбинированным методом хорд и касательных

Б) методом итераций

П/п	Задание А	Задание Б
1.	$2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$	$x^3 + 2x^2 + 2 = 0$
2.	$x^3 - 3x^2 + 3 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$
3.	$x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$	$x^2 - 2x + 2 = 0$
4.	$2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$	$x^3 + 3x - 1 = 0$
5.	$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$	$x^3 + x - 3 = 0$
6.	$x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0$	$x^3 + 0{,}4x^2 + 0{,}6x - 1{,}6 = 0$
7.	$2x^3 + 9x^2 - 10 = 0$	$x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}4x - 1{,}4 = 0$
8.	$x^3 + 3x^2 - 3 = 0$	$x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x + 2 = 0$
9.	$x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$	$x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$
10.	$x^3 - 12x - 5 = 0$	$x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1 = 0$
11.	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$	$x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x + 1{,}2 = 0$

П/п	Задание А	Задание Б
12.	$x^3-3x^2+1{,}5=0$	$x^3-3x^2+6x-5=0$
13.	$x^3+3x^2-24x-3=0$	$x^3-0{,}2x^2+0{,}5x-1{,}4=0$
14.	$2x^3+9x^2-4=0$	$x^3+2x+4=0$
15.	$x^3+3x^2-1=0$	$x^3-3x^2+12x-12=0$
16.	$x^3-3x^2-24x-3=0$	$x^3+0{,}2x^2+0{,}5x+0{,}8=0$
17.	$x^3-12x+6=0$	$x^3+4x-6=0$
18.	$2x^3-3x^2-12x+10=0$	$x^3+0{,}1x^2+0{,}4x-1{,}2=0$
19.	$x^3-3x^2+2{,}5=0$	$x^3+3x^2+6x-1=0$
20.	$x^3+3x^2-3{,}5=0$	$x^3-0{,}1x^2+0{,}4x-1{,}5=0$
21.	$x^3-3x^2-24x-8=0$	$x^3-3x^2+6x-2=0$
22.	$x^3-12x+10=0$	$x^3-0{,}2x^2+0{,}3x-1{,}2=0$
23.	$2x^3-3x^2-12x+1=0$	$x^3-3x^2+12x-9=0$
24.	$x^3-4x^2+2=0$	$x^3+0{,}2x^2+0{,}5x-2=0$
25.	$x^3+3x^2-24x+1=0$	$x^3+3x+1=0$
26.	$2x^3+9x^2-6=0$	$x^3+0{,}2x^2+0{,}5x-1{,}2=0$
27.	$x^3-3x^2-24x+10=0$	$x^3-3x^2+9x+2=0$
28.	$x^3-12x-10=0$	$x^3-0{,}1x^2+0{,}4x-1{,}5=0$
29.	$2x^3-3x^2-12x+8=0$	$x^3-3x^2+6x+3=0$
30.	$x^3-3x^2+3{,}5=0$	$x^3-0{,}1x^2+0{,}3x-0{,}6=0$

Отчет должен содержать

1. Название, цель и задание работы.
2. Подробное решение задания.
3. Ответ, содержащий обоснование полученных результатов и выводов.

Контрольные вопросы

1. Какие вам известны методов решений нелинейных уравнений?
2. Какие уравнения называют нелинейными? трансцендентными?
3. Алгоритм комбинированного метода.
4. Алгоритм метода итераций.