ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Тема: «Транспортная задача. Метод потенциалов»

Цель работы: Получить практические навыки решения транспортной задачи методом потенциалов.

Предварительная подготовка: спец. дисциплина «Математические методы»

Количество часов: 2 часа

Краткая теория

Нахождения решения транспортной задачи методом потенциалов включает следующие этапы:

1. Находят опорный план. При этом число заполненных клеток должно быть равным n+m-1.
2. Находят потенциалы β_{ij} и α_{ij} соответственно пунктов назначения и отравления.
3. Для каждой свободной клетки определяют число α_{ij}. Если среди чисел α_{ij} нет положительных, то получен оптимальный план транспортной задачи; если же они имеются, то переходят к новому опорному плану.
4. Среди положительных чисел α_{ij} выбирают максимальное, строят для свободной клетки, которой оно соответствует, цикл пересчета и производят сдвиг по циклу пересчета.
5. Полученный опорный план проверяют на оптимальность, т.е. снова повторят все действия начиная с этапа 2.

В заключение отметим, что при определении опорного плана или в процессе решения задачи может быть получен вырожденный опорный план. Чтобы избежать в этом случае зацикливания, следует соответствующие нулевые элементы опорного плана заменить сколь угодно малым положительным числом ε и решать задачу как вырожденную. В оптимальном плане такой задачи необходимо считать ε равным нулю.

Пример. Для транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, найти оптимальный план.

ПО	ПН				Запасы
	B1	B2	B3	B4	
A1	1 30	2 20	4	1	50
A2	2	3 10	1 10	5 10	30
A3	3	2	4	4 10	10
Потребности	30	30	10	20	90

Решение. Сначала, используя метод СЗУ, находим опорный план задачи. Этот план записан в таблице.

Найденный опорный план проверяем на оптимальность. В связи с этим находим потенциалы ПО и ПН. Для определения потенциалов получаем систему

$$\begin{cases} \beta_1 - \alpha_1 = 1 \\ \beta_2 - \alpha_1 = 2 \\ \beta_2 - \alpha_2 = 3 \\ \beta_3 - \alpha_2 = 1 \\ \beta_4 - \alpha_2 = 5 \\ \beta_4 - \alpha_3 = 4 \end{cases}$$

содержащую шесть уравнений с семью неизвестными. Полагая $\alpha_1 = 0$, находим $\alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \beta_3 = 0, \beta_4 = 4$. Для каждой свободной клетки вычисляем число $\Delta_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$: $\Delta_{13} = -4, \Delta_{14} = 3, \Delta_{21} = 0, \Delta_{32} = 0, \Delta_{31} = -2, \Delta_{33} = -4.$

Так как среди чисел Δ_{ij} имеются положительные , то построенный план перевозок не является оптимальным и надо перейти к новому опорному плану. Наибольшим среди положительных Δ_{ij} являются $\Delta_{14} = 3$, поэтому для данной свободной клетки строим цикл пересчета и проводим сдвиг по этому циклу

ПО	ПН				Запасы
	B1	B2	B3	B4	
A1	1 30	2 - 20	4	1 +	50
A2	2	3 + 10	1 10	5 - 10	30
A3	3	2	4	4 10	10
Потребности	30	30	10	20	90

Наименьшее из чисел в минусовых клетках равно 10. Клетка, в которой находится это число, становится свободной в новой таблице. Другие числа в новой таблице получаются так: числу 10, стоящему в плюсовой клетке, добавим 10 и вычтем 10 из числа 20, находящегося в минусовой клетке. Клетка на пересечении строки A_2 и столбца B_4 становится свободной.

После этих преобразований получаем новый опорный план.

ПО	ПН				Запасы
	B1	B2	B3	B4	
A1	1 30	2 - 10	4	1 + 10	50
A2	2	3 20	1 10	5	30
A3	3	2 +	4	4 - 10	10
Потребности	30	30	10	20	90

Этот план проверяем на оптимальность. Снова находим потенциалы ПО и ПН. Для этого составляем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \beta_1 - \alpha_1 = 1 \\ \beta_2 - \alpha_1 = 2 \\ \beta_2 - \alpha_2 = 3 \\ \beta_3 - \alpha_2 = 1 \\ \beta_4 - \alpha_1 = 1 \\ \beta_4 - \alpha_3 = 4 \end{cases}$$

Полагая $\alpha_1 = 0$, находим $\alpha_2 = -1, \alpha_3 = -3, \beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \beta_3 = 0, \beta_4 = 1$. Для каждой свободной клетки вычисляем число $\Delta_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$: $\Delta_{13} = -2, \Delta_{21} = 0, \Delta_{24} = -3, \Delta_{32} = 3, \Delta_{31} = 1, \Delta_{33} = -1.$

Таким образом, видим, что данный план перевозок не является оптимальным. Поэтому переходим к новому опорному плану

ПО	ПН				Запасы
	B1	B2	B3	B4	
A1	1 30	2 0	4	1 20	50
A2	2	3 20	1 10	5	30
A3	3	2 10	4	4	10
Потребности	30	30	10	20	90

Сравнивая разности $\beta_j - \alpha_i$ новых потенциалов , отвечающих свободным клеткам таблицы, с соответствующими числами c_{ij}, видим, что указанные разности потенциалов для всех свободных клеток не превосходят соответствующих чисел c_{ij}. Следовательно, полученный план

$$x = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

является оптимальным. При данном плане стоимость перевозок $S = 1 \cdot 30 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 20 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 140$

Задание: Решить задачу оптимального планирования выпуска продукции.

В трех хранилищах А1, А2, А3 имеется соответственно а1, а2, а3 тонн топлива. Требуется спланировать перевозку топлива пяти потребителям В1, В2, В3, В4, В5, спрос которых равен соответственно в1, в2, в3, в4, в5 тонн, так, чтобы затраты на транспортировку были минимальны. Тарифы перевозок представлены в виде матрицы C_{ij}.

Конкретные данные приведены в нижеследующей таблице.

Вариант	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***
а1	300	120	300	150	120	175	260	250	370	560	350	400	300
а2	400	150	400	170	180	165	400	300	450	570	350	370	150
а3	900	100	900	260	230	180	240	270	430	620	300	380	250
в1	250	65	250	100	70	90	180	120	300	250	180	250	150
в2	300	90	300	90	120	120	200	200	230	300	220	200	100
в3	350	60	350	160	105	110	190	190	330	350	230	290	150
в4	500	70	500	150	125	130	230	230	290	500	270	260	100
в5	200	85	200	80	110	70	100	80	100	250	100	250	200
с11	2	7	2	2	14	12	3	2	21	3	11	2	20
с12	4	4	4	10	8	9	8	4	18	10	4	4	3
с13	5	15	5	15	17	7	7	11	14	15	15	5	9
с14	7	9	7	14	5	11	11	5	3	17	7	11	15
с15	9	14	9	4	3	6	15	3	6	9	2	3	35
с21	1	11	1	3	21	4	14	8	7	2	20	12	14
с22	6	2	6	7	10	3	3	17	11	16	9	8	10
с23	3	7	3	12	7	12	1	13	10	3	7	6	12
с24	5	3	5	5	11	2	8	7	5	15	14	14	20
с25	4	10	4	8	6	8	6	6	12	4	5	11	46
с31	6	4	6	21	3	5	9	14	4	8	18	10	25
с32	3	5	3	18	5	17	5	10	8	5	10	15	11
с33	2	12	2	6	8	9	16	5	12	12	3	7	16
с34	1	8	1	13	4	4	7	8	8	14	8	9	19
с35	10	17	10	16	9	11	12	9	13	7	6	18	48

Вариант	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*
a1	180	250	200	120	210	170	250	225	150	1000	300	350
a2	100	125	100	100	140	120	200	250	200	4000	400	400
a3	220	225	200	180	150	110	150	225	150	2000	900	950
в1	100	120	80	70	80	90	75	150	80	450	250	250
в2	60	110	100	110	120	60	125	110	110	650	300	300
в3	90	80	70	80	90	100	150	135	60	3200	350	350
в4	70	90	130	100	110	80	50	85	140	500	500	500
в5	80	100	120	140	100	70	200	120	110	2200	250	300
c11	7	12	7	7	7	11	11	11	21	2	21	21
c12	3	42	20	20	20	7	7	7	4	4	9	10
c13	9	15	3	3	3	3	20	20	12	5	8	8
c14	15	17	15	9	9	9	3	3	7	7	3	19
c15	35	9	35	35	15	15	15	15	9	9	2	9
c21	14	16	3	3	3	12	12	12	11	1	11	17
c22	10	60	16	14	14	3	3	3	16	6	6	9
c23	12	13	10	10	10	10	14	14	3	3	32	15
c24	20	15	20	12	12	12	10	10	5	5	5	22
c25	46	4	41	42	20	20	20	20	13	4	12	1
c31	15	16	15	15	15	19	18	18	15	6	6	23
c32	11	34	25	31	25	15	15	15	3	3	3	9
c33	14	22	11	21	11	11	25	25	2	2	21	11
c34	17	14	19	16	16	16	11	11	10	1	11	10
c35	39	10	40	47	19	19	15	15	10	10	10	12

Контрольные вопросы

1. Сформулировать постановку транспортной задачи.
2. Записать условие баланса транспортной задачи.
3. Какие решения транспортной задачи называются вырожденными, а какие не вырожденными?
4. Цикл. Определение. Алгоритм составления.
5. Как рассчитать оценки свободных клеток.
6. Допустимый план. Оптимальный план.
7. Алгоритм метода потенциалов.