Практическое занятие №4

Тема: «Решение алгебраических и трансцендентных уравнений приближенными методами»

Цель: получение практических навыков решение алгебраических и трансцендентных уравнений приближенными методами – метод проб, метод хорд и метод касательных

Предварительная подготовка: изучить материал параграфов «Отделение корней уравнения», «Метод половинного деления», «Метод хорд» и «Метод касательных» (по конспекту).

Количество часов: 2 часа

Оборудование: калькулятор.

Краткая теория

Процесс нахождения приближенных значений корней уравнения разбивается на два этапа

1) отделение корней
2) уточнение корней до заданной степени точности

Отделить корень – это значит разбить всю ОДЗ на отрезки, в каждом из которых содержится один корень. Отделение можно произвести двумя способами – графически и аналитически.

Исследование алгебраических уравнений

Число корней у трансцендентных уравнений может быть произвольным, а число корней алгебраического уравнения может быть определен заранее.

Пусть дано алгебраическое уравнение вида

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

Уравнение считается полным, если все коэффициенты a_i не равны 0, т.е. при всех степенях х есть ненулевой коэффициент.

Уравнение считается неполным, если хотя бы один коэффициент при какой-либо степени х равно 0.

Если уравнение полное, то количество положительных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов. Количество отрицательных корней равно количеству постоянств знака у соседних элементов.

Если уравнение неполное, то количество положительных корней считается так же как для полного, а для подсчета количества отрицательных корней необходимо подсчитать перемены знака у соседних коэффициентов при замене х на «-х».

Метод половинного деления (проб)

Алгоритм метода:

1. Отрезок [a;b] делим пополам: $c = \frac{a+b}{2}$. Получим два отрезка [a;c] и [c;b] длина которых $\frac{b-a}{2}$
2. Если $f(c)=0$, то c – точный корень уравнения $f(x)=0 \Rightarrow \xi = c$. Если же $f(c)\neq 0$, то из двух отрезков [a;c] и [c;b] выберем тот, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения противоположных знаков. Обозначим этот отрезок $[a_1;b_1]$
3. Затем отрезок $[a_1;b_1]$ снова делим пополам на два отрезка и снова производим действия, что и в п.2.
4. На n-ом шаге получим $[a_n;b_n]$ $f(a_n)*f(b_n)<0$ длина которого $\frac{b_n - a_n}{2} \leq \varepsilon$. Числа a_n и b_n - корни уравнения $f(x)=0$ с точностью $\varepsilon \Rightarrow$ за приближенное значение корня следует взять $\xi = \frac{a_n + b_n}{2}$

Метод хорд

Если $f'(x)*f''(x)>0$, то корень находится по формуле $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}$

Если $f'(x)*f''(x)<0$, то корень находится по формуле $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)}$

Метод касательных

Если $f'(x)*f''(x)>0$, то за x_0 в формуле принимаем $x_0=b$

Если $f'(x)*f''(x)<0$, то за x_0 в формуле принимаем $x_0=a$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}$$

Пояснение к работе

Задание А. Отделить корни уравнения и уточнить один из них методом проб с точностью до 0,001.

$$x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$$

Решение.

1. Исследуем алгебраическое уравнение.

Уравнение степени n=4, следовательно, уравнение имеет 4, 2 или 0 корней.

Количество положительных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов. Перемен знака 3, следовательно, положительных корней 3 или 1.

Так как уравнение полное, количество отрицательных корней равно количеству постоянств знака у соседних элементов. Следовательно, 1 отрицательный корень.

2. Отделим корни уравнения.

Полагая $f(x)=x^4-x^3-2x^2+3x-3$, имеем $f'(x)=4x^3-3x^2-4x+3$.

Найдем корни производной: $4x^3-3x^2-4x+3=0$; $4x(x^2-1)-3(x^2-1)=0$; $(x^2-1)(4x-3)=0$; $x_1=-1$; $x_2=1$; $x_3=3/4$.

Следовательно, корни уравнения находятся на отрезках $[-\infty,-1]\cup[-1;3/4]\cup[3/4;1]\cup[1,+\infty]$.

Уменьшим промежутки, в которых находятся корни:

x	-3	-2	-1	0	0,5	1	2	3
f(x)	78	7	-6	-3	-2,0625	-2	3	42
Sign f(x)	+	+	-	-	-	-	+	+

Следовательно, $x_1\in[-2;-1]$; $x_2\in[1;2]$.

3. Уточним один из корней, например $x_1\in[-2;-1]$, методом проб до сотых долей.

Все вычисления удобно производить, используя следующую таблицу:

n	a_n^+	b_n^-	$x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$	$f(x_n)= x_n^4- x_n^3-2 x_n^2+3 x_n-3$
0	-2	-1	-1.5	-3.5625
1	-2	-1.5	-1.75	0.3633
2	-1.75	-1.5	-1.63	-1.8140
3	-1.75	-1.63	-1.69	-0.7981
4	-1.75	-1.69	-1.72	-0.2363
5	-1.75	-1.72	-1.73	-0.0406
6	-1.75	-1.73	-1.74	0.1592
7	-1.74	-1.73		

Ответ: $x_1\approx-1,73$

Задание Б. Отделить корни уравнения и уточнить один из них методом хорд с точностью до 0,001. $x^3-0,2x^2+0,5x+1,5=0$

Решение.

1. Исследуем алгебраическое уравнение.

Уравнение степени n=3, следовательно, уравнение имеет 3 или 1 корней.

Количество положительных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов. Перемен знака 2, следовательно, положительных корней 2 или ни одного.

Так как уравнение полное, количество отрицательных корней равно количеству постоянств знака у соседних элементов. Значит, 1 отрицательный корень.

2. Отделим корни уравнения.

Найдем критические точки, решив уравнение f'(x)=0. D=0.16-6<0, следовательно, критических точек нет. Составим таблицу знаков функции f(x):

x	-3	-2	-1	0	0,5	1	2	3
f(x)	-28,8	-8,3	-0,2	1,5	1,825	2,8	9,7	28,2
Sign f(x)	-	-	-	+	+	+	+	+

Следовательно, уравнение имеет один единственный корень, лежащий в промежутке [-1;0].

3. Уточним корень уравнения методом хорд.

Для определения формулы определим знак выражения f'(x)*f''(x).

$f'(x)=3x^2-0,4x+0,5>0$, $f''(x)=6x-0,4<0$, следовательно , f'(x)*f''(x)<0.

Значит, для вычисления применяем формулу:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)}$$, где x_0=b   a=-1; f(a)=f(-1)=-1-0,2-0,5+1,5=-0,2.

Вычисления располагаем в таблицы:

n	x_n	$f(x_n)=x_n^3-0,2x_n^2+0,5x_n+1,5$	x_n-a	$f(x_n)-f(a)$	$-\frac{f(x_n)(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)}$
0	0	1,5	1	1,7	-0,8824
1	-0,8824	0,2162	0,1176	0,4162	-0,0611
2	-0,9435	0,0105	0,0565	0,2105	-0,0028
3	-0,9463	0,0005	0,0537	0,2005	-0,0001
4	-0.9464				

Ответ: x $\approx$-0,946

<u>Задание В</u>. Отделить корни уравнения и уточнить один из них методом касательных с точностью до 0,001 $x^3-0,2x^2+0,5x+1,5=0$

Решение.

1. Исследуем алгебраическое уравнение.

Уравнение степени n=3, следовательно, уравнение имеет 3 или 1 корней.

Количество положительных корней равно количеству перемен знака у соседних элементов. Перемен знака 2, следовательно, положительных корней 2 или ни одного.

Так как уравнение полное, количество отрицательных корней равно количеству постоянств знака у соседних элементов. Значит, 1 отрицательный корень.

2. Отделим корни уравнения.

Полагая $f(x)=x^3-0,2x^2+0,5x+1,5$, имеем $f'(x)=3x^2-0,4x+0,5$.

Найдем критические точки, решив уравнение f'(x)=0. D=0.16-6<0, следовательно, критических точек нет. Составим таблицу знаков функции f(x):

x	-3	-2	-1	0	0,5	1	2	3
f(x)	-28,8	-8,3	-0,2	1,5	1,825	2,8	9,7	28,2
Sign f(x)	-	-	-	+	+	+	+	+

Следовательно, уравнение имеет один единственный корень, лежащий в промежутке [-1;0].

3. Уточним корень уравнения методом касательных.

Для определения формулы определим знак выражения f'(x)*f''(x).

$f'(x)=3x^2-0,4x+0,5>0$, $f''(x)=6x-0,4<0$, следовательно , f'(x)*f''(x)<0.

Значит, для вычисления применяем формулу:

Для вычисления применяем формулу $$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$, где x_0=a

Для вычисления используем таблицу:

n	x_n	$f(x_n)=x_n^3-0,2x_n^2+0,5x_n+1,5$	$f'(x_n)=3x_n^2-0,4x_n+0,5$	$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	-1	-0.2	3.9	0.051
1	-0.949	-0.0093	3.5814	0.0026
2	-0.9464	-0.0004	3.5657	0.00001

Ответ: x $\approx$-0,946.

Задание

Отделить корни уравнения и уточнить один из них с точностью до 0,001

А) методом проб Б) методом хорд В) методом касательных

П/п	Задание А	Задание Б	Задание В
1.	$3x^4+4x^3-12x-5=0$	$x^3+3x^2+9x-8=0$	$x^3+0,1x^2+0,4x-1,2=0$
2.	$2x^3-9x^2-60x+1=0$	$x^3-6x-8=0$	$x^3-0,2x^2+0,5x+1,4=0$
3.	$x^4-x-1=0$	$x^3-3x^2+6x+3=0$	$x^3+x-3=0$
4.	$2x^4-x^2-10=0$	$x^3-0,1x^2+0,4x-1,5=0$	$x^3+0,4x^2+0,6x-1,6=0$
5.	$3x^4+8x^3+6x^2-10=0$	$x^3-3x^2+9x+2=0$	$x^3-0,2x^2+0,4x-1,4=0$
6.	$x^4-18x^2+6=0$	$x^3+x-5=0$	$x^3+3x^2+12x+3=0$
7.	$x^4+4x^3-8x^2-17=0$	$x^3+0,2x^2+0,5x-1,2=0$	$x^3-0,2x^2+0,5x-1=0$
8.	$x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$	$x^3+3x+1=0$	$x^3-0,1x^2+0,4x+1,2=0$
9.	$3x^4+4x^3-12x^2+1=0$	$x^3+0,2x^2+0,5x-2=0$	$x^3-3x^2+6x-5=0$
10.	$3x^4-8x^3-18x^2+2=0$	$x^3-3x^2+12x-9=0$	$x^3-02x^2+0,5x-1,4=0$
11.	$2x^4-8x^3+8x^2-1=0$	$x^3-0,2x^2+0,3x-1,2=0$	$x^3-2x+4=0$
12.	$2x^4+8x^3+8x^2-1=0$	$x^3-3x^2+6x-2=0$	$x^3-0,2x^2+0,3x+1,2=0$
13.	$x^4-4x^3-8x^2+1=0$	$x^3-0,1x^2+0,4x-1,5=0$	$x^3-3x^2+12x-12=0$
14.	$3x^4+4x^3-12x^2-5=0$	$x^3+3x^2+6x-1=0$	$x^3+0,2x^2+0,5x+0,8=0$
15.	$2x^3-9x^2-60x+1=0$	$x^3+0,1x^2+0,4x-1,2=0$	$x^3+4x-6=0$
16.	$x^4-x-1=0$	$x^3+4x-6=0$	$x^3+0,1x^2+0,4x-1,2=0$
17.	$2x^4-x^2-10=0$	$x^3+0,2x^2+0,5x+0,8=0$	$x^3+3x^2+6x-1=0$
18.	$3x^4+8x^3+6x^2-10=0$	$x^3-3x^2+12x-12=0$	$x^3-0,1x^2+0,4x-1,5=0$
19.	$x^4-18x^2+6=0$	$x^3-0,2x^2+0,3x+1,2=0$	$x^3-3x^2+6x-2=0$
20.	$x^4+4x^3-8x^2-17=0$	$x^3-2x+4=0$	$x^3-0,2x^2+0,3x-1,2=0$
21.	$x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$	$x^3-02x^2+0,5x-1,4=0$	$x^3-3x^2+12x-9=0$
22.	$3x^4+4x^3-12x^2+1=0$	$x^3-3x^2+6x-5=0$	$x^3+0,2x^2+0,5x-2=0$
23.	$3x^4-8x^3-18x^2+2=0$	$x^3-0,1x^2+0,4x+1,2=0$	$x^3+3x+1=0$
24.	$3x^4+4x^3-12x^2-5=0$	$x^3-0,2x^2+0,5x-1=0$	$x^3+0,2x^2+0,5x-1,2=0$
25.	$2x^3-9x^2-60x+1=0$	$x^3+3x^2+12x+3=0$	$x^3+x-5=0$
26.	$x^4-x-1=0$	$x^3-0,2x^2+0,4x-1,4=0$	$x^3-3x^2+9x+2=0$
27.	$2x^4-x^2-10=0$	$x^3+0,4x^2+0,6x-1,6=0$	$x^3-0,1x^2+0,4x-1,5=0$
28.	$3x^4+8x^3+6x^2-10=0$	$x^3+x-3=0$	$x^3-3x^2+6x+3=0$
29.	$x^4-18x^2+6=0$	$x^3-0,2x^2+0,5x+1,4=0$	$x^3-6x-8=0$
30.	$3x^4+4x^3-12x^2+1=0$	$2x^3-9x^2-60x+1=0$	$x^3+3x^2+9x-8=0$

Отчет должен содержать

1. Название, цель и задание работы.
2. Подробное решение задания.
3. Ответ, содержащий обоснование полученных результатов и выводов.

Контрольные вопросы

1. Какие вам известны методов решений нелинейных уравнений?
2. Какие уравнения называют нелинейными? трансцендентными?
3. Алгоритм метода половинного деления.
4. Алгоритм метода хорд.
5. Алгоритм метод касательных.