Практическое занятие №2

Тема: «Вычисление систем линейных уравнений методом Гаусса»

Цель: получение практических навыков вычисления по схеме единственного деления

Предварительная подготовка: изучить материал параграфа «Решение СЛУ методом последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса)» и «Вычисление определителей методом Гаусса» (по конспекту).

Количество часов: 2 часа

Оборудование: калькулятор.

Краткая теория

Схема единственного деления для решения СЛУ методом Гаусса

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45} \end{cases}$$

Выполним прямой ход по методу Гаусса. Вычисления занесем в таблицу:

Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены	Контрольные суммы
x_1	x_2	x_3	x_4		
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$c_1 = \sum_{j=1}^{5} a_{1j}$
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$c_2 = \sum_{j=1}^{5} a_{2j}$
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$c_3 = \sum_{j=1}^{5} a_{3j}$
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$c_4 = \sum_{j=1}^{5} a_{4j}$
1	$\alpha_{12} = a_{12}/a_{11}$	$\alpha_{13} = a_{13}/a_{11}$	$\alpha_{14} = a_{14}/a_{11}$	$\alpha_{15} = a_{15}/a_{11}$	$\beta_1 = c_1/a_{11}$
	$a'_{22} = a_{22} - a_{21} \cdot \alpha_{12}$	$a'_{23} = a_{23} - a_{21} \cdot \alpha_{13}$	$a'_{24} = a_{24} - a_{21} \cdot \alpha_{14}$	$a'_{25} = a_{25} - a_{21} \cdot \alpha_{15}$	$c'_2 = c_1 - a_{21} \cdot \beta_1$
	$a'_{32} = a_{32} - a_{31} \cdot \alpha_{12}$	$a'_{33} = a_{33} - a_{31} \cdot \alpha_{13}$	$a'_{34} = a_{34} - a_{31} \cdot \alpha_{14}$	$a'_{35} = a_{35} - a_{31} \cdot \alpha_{15}$	$c'_3 = c_3 - a_{31} \cdot \beta_1$
	$a'_{42} = a_{42} - a_{41} \cdot \alpha_{12}$	$a'_{43} = a_{43} - a_{41} \cdot \alpha_{13}$	$a'_{44} = a_{44} - a_{41} \cdot \alpha_{14}$	$a'_{45} = a_{45} - a_{41} \cdot \alpha_{15}$	$c'_4 = c_4 - a_{41} \cdot \beta_1$
	1	$\alpha_{23} = a'_{23}/a'_{22}$	$\alpha_{24} = a'_{24}/a'_{22}$	$\alpha_{25} = a'_{25}/a'_{22}$	$\beta_2 = c'_2/a'_{22}$
		$a''_{33} = a'_{33} - a'_{32} \cdot \alpha_{23}$	$a''_{34} = a'_{34} - a'_{32} \cdot \alpha_{24}$	$a''_{35} = a'_{35} - a'_{32} \cdot \alpha_{25}$	$c''_3 = c'_3 - a'_{32} \cdot \beta_2$
		$a''_{43} = a'_{43} - a'_{42} \cdot \alpha_{23}$	$a''_{44} = a'_{44} - a'_{42} \cdot \alpha_{24}$	$a''_{45} = a'_{45} - a'_{42} \cdot \alpha_{25}$	$c''_4 = c'_4 - a'_{42} \cdot \beta_2$
		1	$\alpha_{34} = a''_{34}/a''_{33}$	$\alpha_{35} = a''_{35}/a''_{33}$	$\beta_3 = c''_3/a''_{33}$
			$a'''_{44} = a''_{44} - a''_{44} \cdot \alpha_{34}$	$a'''_{45} = a''_{45} - a''_{43} \cdot \alpha_{35}$	$c'''_4 = c''_4 - a''_{43} \cdot \beta_3$
			1	$\alpha_{45} = a'''_{45}/a'''_{44}$	$\beta_4 = c'''_4/a'''_{44}$

Получили систему эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 = \alpha_{15} \\ \quad x_2 \quad + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 = \alpha_{25} \\ \qquad x_3 \quad + \alpha_{34}x_4 = \alpha_{35} \\ \qquad\qquad x_4 = \alpha_{45} \end{cases}$$

Выполним обратный ход:

$$x_4 = \alpha_{45}$$
$$x_3 = \alpha_{35} - \alpha_{34}x_4$$
$$x_2 = \alpha_{25} - \alpha_{23}x_3 - \alpha_{24}x_4$$
$$x_1 = \alpha_{15} - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 - \alpha_{14}x_4$$

Вычисление определителей с помощью схемы Гаусса

Метод Гаусса использован при вычислении определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{n-1}$$

где $a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, \ldots, a_{nn}^{n-1}$ -ведущие коэффициенты схемы единственного деления.

Пояснение к работе

Задание 1. Вычислить определитель по схеме Гаусса с точностью до 0,001.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение:

x1	x2	x3	Контр сумма	
1	2	-1	2	1
0	2	-3	-1	
1	-1	2	2	
1	2	-1	2	
	2,0000	-3,0000	-1,0000	2
	-3,0000	3,0000	0,0000	
	1,0000	-1,5000	-0,5	
		-1,5000	-1,5000	3
		1,0000	1	

Следовательно, $\det A = 1 \cdot 2 \cdot (-1{,}5) = -3$.

Ответ: det A=-3

Задание 2. Решить систему по схеме Гаусса с точностью до 0,001.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение:

Вычисления производим по схеме единственного деления. Прямой ход решения задачи:

x1	x2	x3	Свободные члены	Контрольная сумма	Разделы
2	-4	3	1	2	1
1	3	2	4	10	
3	-5	4	1	3	
1	-2	1,5	0,5	1	
	5,0000	0,5000	3,5000	9,0000	2
	1,0000	-0,5000	-0,5000	0,0000	
	1,0000	0,1000	0,7000	1,8	
		-0,6000	-1,2000	-1,8000	3
		1,0000	2,0000	3	
		1,0000	2,0000		
	1,0000		0,5000		
1			-1,5000		

Обратный ход решения задачи:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1{,}5x_3 = 0{,}5 \\ x_2 + 0{,}1x_3 = 0{,}7 \\ x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0{,}7 - 0{,}1 \cdot x_3 = 0{,}7 - 0{,}1 \cdot 2 = 0{,}5 \\ x_1 = 0{,}5 + 2x_2 - 1{,}5x_3 = 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5 - 1{,}5 \cdot 2 = -1{,}5 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -1{,}5; \quad x_2 = 0{,}5; \quad x_3 = 2$.

Проверка:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1{,}5) - 4 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 2 = 1 \\ -1{,}5 + 3 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 2 = 4 \\ 3 \cdot (-1{,}5) - 5 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 2 = 1 \end{cases}$$

Задания

Задание:

1. Вычислить определитель по схеме Гаусса с точностью до 0,001.
2. Решить систему по схеме Гаусса с точностью до 0,001.

Вариант	Задание 1	Задание 2	Вариант	Задание 1	Задание 2
№1.	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$	№2.	$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$
№3.	$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$	№4.	$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$
№5.	$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$	№6.	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$
№7.	$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$	№8.	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$

№9.	$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$	№10.	$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$
№11.	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$	№12.	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8 \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$
№13.	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$	№14.	$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 12 \end{cases}$
№15.	$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$	№16.	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$
№17.	$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$	№18.	$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$
№19.	$\begin{vmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$	№20.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$
№21.	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$	№22.	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$
№23.	$\begin{vmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 4 & 11 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$	№24.	$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$
№25.	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$	№26.	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$
№27.	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$	№28.	$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$
№29.	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$	№30.	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

Отчет должен содержать

1. Название, цель и задание работы.
2. Подробное решение задания.
3. Ответ, содержащий обоснование полученных результатов и выводов.

Контрольные вопросы

1. Какие вам известны группы методов решений линейных систем?
2. К каким методам относится метод Гаусса?
3. Чем характерны эти методы?
4. Какие методы так же относятся к данной группе?
5. Алгоритм заполнения схемы единственного деления.