Лабораторная работа № 1

Тема: «Симплексный метод»

Цель работы: Получить практические навыки решения задач линейного программирования симплексным методом.

Предварительная подготовка: спец. дисциплина «Математические методы»

Количество часов: 2 часа

Краткая теория

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad \rightarrow \max \qquad (1)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,n}\right)$$

Система ограничении (2) имеет особенности, в каждом уравнении есть переменные с коэффициентом единица (1) и, причем так, что в других уравнениях эта переменная отсутствует. Такие переменные называются **<u>базисными</u>** или **<u>зависимыми</u>**.

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ – базисные переменные.

n-m – не базисные переменные.

Число базисных переменных должно быть равно числу уравнения.

Число уравнений должно быть меньше числа переменных, таким образом, если система ограничении совместна, и она имеет бесчисленное множество решении.

Признак оптимальности: $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$

F → max, то все $\Delta j < 0$

Пример:

Найти максимальное значение функции

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \rightarrow \max$$

При заданной системе ограничении $\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 180 \end{cases}$

Преобразованную систему уравнений запишем в векторной форме:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad P_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Поскольку среди векторов P_j имеются три единичных вектора, для данной задачи можно непосредственно записать опорный план. Таковым является план X=(0;0;0;360;192;180).

Составляем симплексную таблицу для I итерации, подсчитываем значения F_0, Δ_j и проверяем исходный опорный план на оптимальность.

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

$$F_0 = \sum_{i=1}^{m} C_{бi} b_i = 0 \cdot 360 + 0 \cdot 192 + 0 \cdot 180 = 0$$

$$\Delta_1 = (0 \cdot 18 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 5) - 9 = -9$$

$$\Delta_2 = (0 \cdot 15 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3) - 10 = -10$$

$$\Delta_3 = (0 \cdot 12 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 3) - 16 = -16$$

$$\Delta_4 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 0 = 0$$

$$\Delta_5 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0$$

$$\Delta_6 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0$$

Отрицательные числа не только свидетельствуют о возможности увеличения общей стоимости производимой продукции, но и показывают, на сколько увеличится эта сумма при введении в план единицы того или другого вида продукции. Поэтому с экономической точки зрения наиболее целесообразным является включение в план производства изделий С. $\max\{|-9|,|-10|,|-16|\}=|-16|$

Следовательно, столбец 3- разрешающий столбец. Найдем разрешающую строку.

$$\theta_0=\min\left\{\frac{360}{12};\frac{192}{8};\frac{180}{3}\right\}=\frac{192}{8}$$

Найдя число 192/8=24, мы тем самым с экономической точки зрения определили, какое изделий С предприятие может изготовлять с учетом норм расхода и имеющихся объемов сырья каждого вида. Следовательно, вектор P_5 подлежит исключению из базиса. Составим таблицу для II итерации.

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

$\max\{|-2|\}=|-2|$ $\qquad$ $\theta_0=\min\left\{\frac{72}{9};\frac{24\cdot 2}{1};\frac{108\cdot 2}{3}\right\}=\frac{72}{9}=8$

Следовательно, исключению подлежит вектор P_4, иными словами, выпуск изделий В ограничен имеющимися в распоряжении предприятия сырьем I вида.

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

Найденный план является оптимальным. Следовательно, лан выпуска продукции, включающий изготовление 8 изделий В и 20 изделий С, является оптимальным. При данном плане полностью используется сырье I и II видов и остается неиспользованным 96 кг сырья III вида, а стоимость производимой продукции равна 400 руб. Оптимальным планом производства продукции не предусматривается изготовление изделий вида А, так как ее введение в план выпуска привело б к уменьшению указанной общей стоимости.

Ответ: $X^*=(0;8;20;0;0;96),\ F(X^*)=400$

Задание: Решить задачу оптимального планирования выпуска продукции при следующих условиях.

Для изготовления двух видов продукции используются три вида сырья. При производстве единицы продукции первого вида затрачивается а1 сырья первого вида, а2 сырья второго вида и а3 сырья третьего вида. При производстве единицы продукции второго вида затрачивается в1 сырья первого вида, в2 сырья второго вида и в3 сырья третьего вида. Запасы сырья первого вида составляют А кг., второго В кг., третьего – С кг. Прибыль от реализации единицы продукции первого вида составляет Р1 руб., от реализации единицы продукции второго вида Р2 руб.

Требуется симплексным методом найти план выпуска продукции по видам с учетом имеющихся ограниченных ресурсов, который обеспечивал бы предприятию максимальный доход; дать содержательный ответ, вскрыв экономический смысл всех переменных, участвующих в решении задачи.

Конкретные данные приведены в нижеследующей таблице.

№ п/п	а1	а2	а3	в1	в2	в3	А	В	С	Р1	Р2
1	14	14	6	5	8	12	350	392	408	10	5
2	16	9	6	4	9	12	400	333	360	9	12
3	12	4	3	3	5	14	284	136	266	6	4
4	14	4	3	4	4	12	252	120	240	30	40
5	15	4	4	2	3	14	285	113	322	15	9
6	16	3	3	2	2	15	304	83	375	10	12
7	13	4	3	2	4	14	260	124	280	12	10
8	9	7	4	5	8	16	1431	1224	1328	3	2
9	6	5	3	3	10	12	714	910	948	3	9
10	15	5	4	4	3	8	225	100	192	6	8
11	2	3	4	5	6	36	80	102	91	5	11
12	10	8	6	4	6	12	196	168	182	18	10
13	3	2	1	6	5	5	102	80	75	3	10
14	4	2	6	10	10	12	166	138	182	6	20
15	3	4	2	4	7	8	182	807	768	3	2
16	3	4	3	5	8	11	453	616	627	2	5
17	3	4	5	6	3	2	102	91	105	7	9
18	5	3	2	2	3	3	505	393	348	7	4
19	5	4	3	3	3	4	750	630	700	5	6
20	6	4	3	2	3	4	600	520	600	6	3
21	4	7	6	3	5	3	552	607	476	3	6
22	5	5	9	7	1	5	446	503	333	10	12
23	8	7	2	9	9	4	252	321	450	13	7
24	6	5	4	7	2	8	267	444	650	7	12
25	4	5	6	7	8	9	765	655	546	4	3
26	3	2	3	5	5	8	620	345	400	2	7

Замечание. При оформлении отчета задания должны быть выполнены все шаги алгоритма симплексного метода без пропусков промежуточных расчетов.

Контрольные вопросы

1. Сформулировать постановку задачи.
2. Основные формы записи ЗЛП. Переход от одной формы записи к другой.

3. Допустимый план. Оптимальный план.
4. Раскрыть экономический смысл всех используемых переменных.
5. Алгоритм симплексного метода.