Практическое занятие №14

Тема: «Метод покоординатного спуска»

Цель: получение практических навыков получения точки оптимума функции методом покоординатного спуска.

Предварительная подготовка: изучить материал параграфа «Методы многомерной оптимизации» (по конспекту).

Количество часов: 2 часа

Оборудование: калькулятор.

Краткая теория

Методы градиента и скорейшего (наискорейшего) спуска требуют большого числа циклов. Однако, если фиксировать заранее направление линейных поисков частотных минимумов функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то метод нахождения точки относительного min(max) функции будет проще. В простейшем случае поиска частных минимумов осуществляется методом Гаусса-Зейделя последовательно и циклически в направлении осей координат. Этот метод наиболее целесообразен, когда линии уровня функции близки к окружностям или эллипсам.

При расчете по этому методу выбираем начальную точку $M_0(x^0)$ и сдвигаемся из этой точки с приращением, например, первой координаты $x^0{}_1+\Delta x_1$. Если функция увеличилась (а мы ищем min), то двигаемся в противоположную сторону. Затем спускаемся по $\pm\Delta x_2$. Таким образом, в методе покоординатного спуска движение происходит по ломаным, состоящим из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Выбор же шага h и дальнейший расчет идет по блок-схеме метода наискорейшего спуска.

Алгоритм метода наискорейшего спуска

1. Находим градиент заданной функции
2. Задаем точку $M_0(x^0)$
3. Вычисляем $\nabla f(M_0)$
4. $X^1 = x^0 - h\nabla f(x^0)$
5. Подставив координаты X^1 в исходную функцию, получаем $\Phi_1(h)=f(x^0 - \nabla f(x^0))$
6. Решая уравнение $(d\Phi_k(h))/(dh)=0$, находим h, при котором функция $\Phi_1(h)$ имеет min.
7. Найденное значение h подставим в формулу п.4
8. Сравним значение $f(M_0)$ и $f(M_1)$ – необходимо, чтобы $f(M_1) < f(M_0)$
9. Составим $X^2 = x^1 - h\nabla f(x^1)$ и повторяем п.5-8

Пояснение к работе

Задание. Методом покоординатного спуска найти максимум функции $z = 4x_1 + 2x_2 – x_12 – x_2^2 + 5$.

Решение.

1. Найдем градиент функции $\Delta z = (4 – 2x_1; 2 – 2x_2)$
2. Зададим начальную точку M_0 (0;0) и вычислим значение функции в начальной точке $z_0 = 5$
3. Градиент в начальной точке равен $\Delta z = (4;2)$
4. Сдвинемся от начальной точки с приращением $x^0{}_1+\Delta x_1$:$\{x_1 = 4h; x_2 = 0\}$
5. Подставив координаты X^1 в исходную функцию: $z(h) = 16h – 16h^2 + 5$
6. Найдем h: $z(h) = 16 – 32h = 0$ => $h = 2$
7. Вычислим координаты точки M_1 и значение функции в этой точке: M_1 (8;0) и $z_1 = 32 – 64 + 5 = -27$
8. Теперь сдвинемся от начальной точки с приращением $x^0{}_2+\Delta x_2$:$\{ x_1 = 0; x_2 = 2h\}$
9. Подставив координаты X^2 в исходную функцию: $z(h) = 4h – 4h^2$
10. Найдем h: $z(h) = 4 – 16h = 0$ => $h = 0,25$
11. Вычислим координаты точки M_1 и значение функции в этой точке: M_1 (0;0,5) и $z_1 = 1– 0,25 + 5 = 5,75$
12. Следовательно, $\{x1 = 4h; x2 = 0,5 + h\}$ и $z(h) = 16h + 1 + 2h – 16h^2 – 0,25 – h – h^2 + 5 = 17h – 17h^2 + 5,75$. Откуда имеем, $z(h) = 17 – 34h = 0$ => $h = 0,5$
13. Значит, координаты точки M_2 (2;1), а значение функции $z = 8 + 2 – 4 – 1 + 5 = 10$
14. Градиент $\Delta z = (0;0)$, следовательно это точка max

Ответ: $z_{max} = 10$ в точке M(2;1).

Задание

Задание. Найти координаты и минимальное значение функции двух переменных методом по-координатного спуска.

	Функция f(x,y)		Функция f(x,y)
1	$\left(2x^2-y-3\right)^2+x^2+2x+2$	15	$xy+50/x+20/y$
2	$(xy+3)^2+y^2+2y+4$	16	$x^2+y^2-3\ln x-18\ln y$
3	$\left(x^2y^2-y+2\right)^2+x^2+1$	17	$x^3+3xy^2-15x-12y$
4	$\left(3x^2+2y^2-1\right)^2+(xy-3)^2$	18	$2x^3-xy^2+5x^2+y^2$
5	$\left(2x^2-7y^2-2\right)^2+(x^2+y^2-20)^2+3$	19	$\left(2x^2+y^2\right)e^{-(x^2+y^2)}$
6	$\left(x^2+y^2-2x-3\right)^2+(x^2+y^2-2y-3)^2$	20	$-2+\sqrt[3]{x^2+y^2}$
7	$\left(x^2-6x+y^2+8\right)^2+x^2y^2+1$	21	$(x-1)^2+(y-2)^2-1$
8	$\left(x^2-y^2-2\right)^2+(x-y+3)^2$	22	$\sin(x^2+y^2)-0.5$
9	$\ln\left(1+x^2+y^2\right)^2+(x-y-1)^2$	23	$x^2-xy+y^2+2x-2y+1$
10	$\left(x^2+y^2-1\right)^2+(x^2-6x+y^2+8)^2$	24	$xy(x+y-4)$
11	x^3+y^3-3xy	25	$x^3y^2(x+y-5)$
12	$x^2+xy+y^2-3x-6y$	26	$x^2+xy+y^2+1/x+1/y$
13	$-xy^2(1-x-y)$	27	$-(\sin x+\sin y+\sin(x+y))$
14	$3x^2-x^3+3y^2+4y$	28	$-\sin x\sin y\sin(x+y))$
		29	$x^3+y^3-9xy+1$
		30	$x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2+1$

Отчет должен содержать

1. Название, цель и задание работы.
2. Подробное решение задания.
3. Ответ, содержащий обоснование полученных результатов и выводов.

Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются поисковыми?
2. Перечислите градиентные методы, известные вам.
3. Что такое градиент, антиградиент.
4. Алгоритм метода градиента.
5. Алгоритм метода покоординатного спуска
6. Алгоритм метода наискорейшего спуска