Практическое занятие №11

Тема: «Нахождение решений обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта»
Цель: получение практических навыков решений ОДУ при помощи формул Рунге-Кутта.
Предварительная подготовка: изучить материал параграфов «Метод Рунге-Кутта» (по конспекту).
Количество часов: 2 часа
Оборудование: калькулятор.

Краткая теория

Метод Рунге Кутта

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i.$, где $\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i),\quad k_2^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}),\quad k_3^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}),\quad k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})$$

i	X	Y	$y' = f(x,y)$	$k = hf(x,y)$	Δy
0	x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$	$f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2})$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$	$f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2})$	$k_3^{(0)}$	$2k_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^{(0)}$	$f(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)})$	$k_4^{(0)}$	$k_4^{(0)}$
					$\frac{1}{6}\sum = \Delta y_0$
1	x_1	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$f(x_1, y_1)$	$k_1^{(1)}$	$k_1^{(1)}$
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}$	$f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2})$	$k_2^{(1)}$	$2k_2^{(1)}$
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}$	$f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2})$	$k_3^{(1)}$	$2k_3^{(1)}$
	$x_1 + h$	$y_1 + k_3^{(1)}$	$f(x_1 + h, y_1 + k_3^{(1)})$	$k_4^{(1)}$	$k_4^{(1)}$
					$\frac{1}{6}\sum = \Delta y_1$
2	x_2	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	…….	…….	…….

Пояснение к работе

Задание. Вычислить при x=1,5 значение решения дифференциального уравнения $y' = y - x$ с начальным условием $x_0 = 0, y_0 = 1{,}5$, методом Рунге-Кутта, приняв h=0,25, Вычисления вести с 4 знаками после запятой.

Решение. Все вычисления занесем в таблицу

i	x	y	$y' = f(x,y)$	k=hf(x,y)	Δy
0	0,000 0,125 0,125 0,250	1,5000 1,6875 1,6953 1,8926	1,5000 1,5625 1,5703 1,6426	0,3750 0,3906 0,3926 0,4106	0,3750 0,7812 0,7852 0,4106
					0,3920
1	0,250 0,375 0,375 0,500	1,8920 2,0973 2,1073 2,3251	1,6420 1,7223 1,7323 1,8251	0,4105 0,4305 0,4331 0,4562	0,4105 0,8612 0,8662 0,4562
					0,4323
2	0,500 0,625 0,625 0,750	2,3243 2,5523 2,5652 2,8093	1,8243 1,9273 1,9402 2,0593	0,4561 0,4818 0,4850 0,5148	0,4561 0,9636 0,9700 0,5148
					0,4841
3	0,750 0,875 0,875 1,000	2,8084 3,0657 3,0823 3,3602	2,0584 2,1907 2,2073 2,3602	0,5146 0,5477 0,5518 0,5900	0,5146 1,0954 1,1036 0,5900
					0,5506
	1,000	3,3590	2,3590	0,5898	0,5898

4	1,125	3,6539	2,5289	0,6322	1,2644
	1,125	3,6751	2,5501	0,6375	1,2750
	1,250	3,9965	2,7465	0,6866	0,6866
					0,6360
5	1,250	3,9950	2,7450	0,6862	0,6862
	1,375	4,3381	2,9631	0,7408	1,4816
	1,375	4,3654	2,9904	0,7476	1,4952
	1,500	4,7426	3,2426	0,8106	0,8106
					0,7456
6	1,500	4,7406			

Ответ: y(1,5)=4,7406.

Задание

Вычислить при x=b значение решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$, методом Рунге-Кутта, приняв h=0,2:

Вычисления вести с четырьмя знаками после запятой.

Вар-т	$y' = f(x, y)$	$y(x_0) = y_0$	$[a, b]$
1.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(1{,}8) = 2{,}6$	$x \in [1{,}8; 2{,}8]$
2.	$y' = x + \cos\frac{y}{3}$	$y_0(1{,}6) = 4{,}6$	$x \in [1{,}6; 2{,}6]$
3.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0{,}6) = 0{,}8$	$x \in [0{,}6; 1{,}6]$
4.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{7}}$	$y_0(0{,}5) = 0{,}6$	$x \in [0{,}5; 1{,}5]$
5.	$y' = x + \cos\frac{y}{\pi}$	$y_0(1{,}7) = 5{,}3$	$x \in [1{,}7; 2{,}7]$
6.	$y' = x + \cos\frac{y}{2{,}25}$	$y_0(1{,}4) = 2{,}2$	$x \in [1{,}4; 2{,}4]$
7.	$y' = x + \cos\frac{y}{e}$	$y_0(1{,}4) = 2{,}5$	$x \in [1{,}4; 2{,}4]$
8.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(0{,}8) = 1{,}4$	$x \in [0{,}8; 1{,}8]$
9.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0{,}3}}$	$y_0(0{,}5) = 0{,}6$	$x \in [0{,}5; 1{,}5]$
10.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0{,}7}}$	$y_0(1{,}2) = 1{,}4$	$x \in [1{,}2; 2{,}2]$
11.	$y' = x + \cos\frac{y}{1{,}25}$	$y_0(0{,}4) = 0{,}8$	$x \in [0{,}4; 1{,}4]$
12.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{1{,}5}}$	$y_0(0{,}3) = 0{,}9$	$x \in [0{,}3; 1{,}3]$
13.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{1{,}3}}$	$y_0(1{,}2) = 1{,}8$	$x \in [1{,}2; 2{,}2]$
14.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{0{,}3}}$	$y_0(0{,}7) = 2{,}1$	$x \in [0{,}7; 1{,}7]$
15.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{0{,}7}}$	$y_0(0{,}9) = 1{,}7$	$x \in [0{,}9; 1{,}9]$
16.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(1{,}2) = 2{,}1$	$x \in [1{,}2; 2{,}2]$
17.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(2{,}1) = 2{,}5$	$x \in [2{,}1; 3{,}1]$
18.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(1{,}8) = 2{,}6$	$x \in [1{,}8; 2{,}8]$
19.	$y' = x + \sin\frac{y}{3}$	$y_0(1{,}6) = 4{,}6$	$x \in [1{,}6; 2{,}6]$
20.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0{,}6) = 0{,}8$	$x \in [0{,}6; 1{,}6]$
21.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{7}}$	$y_0(0{,}5) = 0{,}6$	$x \in [0{,}5; 1{,}5]$
22.	$y' = x + \sin\frac{y}{\pi}$	$y_0(1{,}7) = 5{,}3$	$x \in [1{,}7; 2{,}7]$
23.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2{,}8}}$	$y_0(1{,}4) = 2{,}2$	$x \in [1{,}4; 2{,}4]$
24.	$y' = x + \sin\frac{y}{e}$	$y_0(1{,}4) = 2{,}5$	$x \in [1{,}4; 2{,}4]$
25.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(0{,}8) = 1{,}3$	$x \in [0{,}8; 1{,}8]$
26.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(1{,}1) = 1{,}5$	$x \in [1{,}1; 2{,}1]$
27.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(0{,}6) = 1{,}2$	$x \in [0{,}6; 1{,}6]$
28.	$y' = x + \sin\frac{y}{1{,}25}$	$y_0(0{,}5) = 1{,}8$	$x \in [0{,}5; 1{,}5]$
29.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{15}}$	$y_0(0{,}2) = 1{,}1$	$x \in [0{,}2; 1{,}2]$
30.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{1{,}3}}$	$y_0(0{,}1) = 0{,}8$	$x \in [0{,}1; 1{,}1]$

Отчет должен содержать

1. Название, цель и задание работы.
2. Подробное решение задания.
3. Ответ, содержащий обоснование полученных результатов и выводов.

Контрольные вопросы

1. Основные определения раздела.
2. Алгоритм метода Рунге-Кутта