Практическое занятие №10

Тема: «Нахождение решений обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи формул Эйлера»

Цель: получение практических навыков решений обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи формул Эйлера

Предварительная подготовка: изучить материал параграфов «Метод Эйлера» и «Модификация метода Эйлера» (по конспекту).

Количество часов: 2 часа

Оборудование: калькулятор.

Краткая теория

Уравнение, в котором неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала, называются дифференциальным уравнением.

Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит только от одной независимой переменой, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

Метод Эйлера

Этот метод является сравнительно грубым и применяется в основном для ориентировочных расчетов. Однако идеи, положенные в основу метода Эйлера, является исходными для ряда других методов.

Формула Эйлера $y_{I+1} = y_i + \Delta y_i$, где $\Delta y_i = y_i' h$.

Модифицированный метод Эйлера

Разобьем отрезок [a, b] на n равных частей точками $x_i = x_0 + ih \quad (i = 0,1,2,...,n)$, где h=(b-a)/n – шаг интегрирования. Сначала вычисляют вспомогательные значения искомой функции $y_{i+1/2}$ в точках $x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$ с помощью формулы $y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} y_i'$, затем находят значение правой части уравнения в средней точке $y_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$ и определяют $y_{i+1} = y_i + hy'_{i'+1/2}$.

Пояснение к работе

Задание. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y' = y - x$ с начальным условием $x_0 = 0 \quad y_0 = 1{,}5$ на отрезке[0;1,5], приняв h=0,25:

1) методом Эйлера
2) модифицированным методом Эйлера

Вычисления вести с четырьмя знаками после запятой.

Решение:

Задание 1.Все вычисления занесем в таблицу

i	x_i	y_i	$y_i' = y_i - x_i$	$\Delta y_i = hy_i'$
0	0	1,5000	1,5000	0,3750
1	0,25	1,8750	1,6250	0,4062
2	0,50	2,2812	1,7812	0,4453
3	0,75	2,7265	1,9765	0,4941
4	1,00	3,2206	2,2206	0,5552
5	1,25	3,7758	2,5258	0,6314
6	1,50	4,4072		

Ответ: значения x_i и y_i полученные в процессе вычисления

Задание 2. Результаты вычислений приведены в таблице

i	x_i	y_i	y_i'	$\frac{h}{2} \cdot y_{i'}'$	$x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$	$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} y_i'$	$y'_{i+1/2}$	$hy'_{i+1/2}$
0	0	1,5000	1,5000	0,1875	0,1250	1,6875	1,5625	0,3906
1	0,25	1,8906	1,6406	0,2051	0,3750	2,0957	1,7207	0,4302
2	0,50	2,3208	1,8208	0,2276	0,6750	2,5484	1,8734	0,4684
3	0,75	2,7892	2,0392	0,2549	0,8750	3,0441	2,1691	0,5423
4	1,00	3,3315	2,3315	0,2914	1,1250	3,6229	2,4974	0,6243
5	1,25	3,9558	2,7058	0,3382	1,3750	4,2940	2,9190	0,7298
6	1,50	4,6856						

Ответ: значения x_i и y_i полученные в процессе вычисления

Задание

Задание. Составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[a,b]$, используя: 1) метод Эйлера 2) модифицированный метод Эйлера

Шаг h=0,2.

Все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками.

Вар	$y' = f(x,y)$	$y(x_0) = y_0$	$[a,b]$
1.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(1{,}8) = 2{,}6$	$x \in [1{,}8;2{,}8]$
2.	$y' = x + \cos\frac{y}{3}$	$y_0(1{,}6) = 4{,}6$	$x \in [1{,}6;2{,}6]$
3.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0{,}6) = 0{,}8$	$x \in [0{,}6;1{,}6]$
4.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{7}}$	$y_0(0{,}5) = 0{,}6$	$x \in [0{,}5;1{,}5]$
5.	$y' = x + \cos\frac{y}{\pi}$	$y_0(1{,}7) = 5{,}3$	$x \in [1{,}7;2{,}7]$
6.	$y' = x + \cos\frac{y}{2{,}25}$	$y_0(1{,}4) = 2{,}2$	$x \in [1{,}4;2{,}4]$
7.	$y' = x + \cos\frac{y}{e}$	$y_0(1{,}4) = 2{,}5$	$x \in [1{,}4;2{,}4]$
8.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(0{,}8) = 1{,}4$	$x \in [0{,}8;1{,}8]$
9.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0{,}3}}$	$y_0(0{,}5) = 0{,}6$	$x \in [0{,}5;1{,}5]$
10.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0{,}7}}$	$y_0(1{,}2) = 1{,}4$	$x \in [1{,}2;2{,}2]$
11.	$y' = x + \cos\frac{y}{1{,}25}$	$y_0(0{,}4) = 0{,}8$	$x \in [0{,}4;1{,}4]$
12.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{1{,}5}}$	$y_0(0{,}3) = 0{,}9$	$x \in [0{,}3;1{,}3]$
13.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{1{,}3}}$	$y_0(1{,}2) = 1{,}8$	$x \in [1{,}2;2{,}2]$
14.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{0{,}3}}$	$y_0(0{,}7) = 2{,}1$	$x \in [0{,}7;1{,}7]$
15.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{0{,}7}}$	$y_0(0{,}9) = 1{,}7$	$x \in [0{,}9;1{,}9]$

Вар	$y' = f(x,y)$	$y(x_0) = y_0$	$[a,b]$
16.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(1{,}2) = 2{,}1$	$x \in [1{,}2;2{,}2]$
17.	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(2{,}1) = 2{,}5$	$x \in [2{,}1;3{,}1]$
18.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(1{,}8) = 2{,}6$	$x \in [1{,}8;2{,}8]$
19.	$y' = x + \sin\frac{y}{3}$	$y_0(1{,}6) = 4{,}6$	$x \in [1{,}6;2{,}6]$
20.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0{,}6) = 0{,}8$	$x \in [0{,}6;1{,}6]$
21.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{7}}$	$y_0(0{,}5) = 0{,}6$	$x \in [0{,}5;1{,}5]$
22.	$y' = x + \sin\frac{y}{\pi}$	$y_0(1{,}7) = 5{,}3$	$x \in [1{,}7;2{,}7]$
23.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2{,}8}}$	$y_0(1{,}4) = 2{,}2$	$x \in [1{,}4;2{,}4]$
24.	$y' = x + \sin\frac{y}{e}$	$y_0(1{,}4) = 2{,}5$	$x \in [1{,}4;2{,}4]$
25.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(0{,}8) = 1{,}3$	$x \in [0{,}8;1{,}8]$
26.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(1{,}1) = 1{,}5$	$x \in [1{,}1;2{,}1]$
27.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(0{,}6) = 1{,}2$	$x \in [0{,}6;1{,}6]$
28.	$y' = x + \sin\frac{y}{1{,}25}$	$y_0(0{,}5) = 1{,}8$	$x \in [0{,}5;1{,}5]$
29.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{15}}$	$y_0(0{,}2) = 1{,}1$	$x \in [0{,}2;1{,}2]$
30.	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{1{,}3}}$	$y_0(0{,}1) = 0{,}8$	$x \in [0{,}1;1{,}1]$

Отчет должен содержать

1. Название, цель и задание работы.
2. Подробное решение задания.
3. Ответ, содержащий обоснование полученных результатов и выводов.

Контрольные вопросы

1. Основные определения раздела.
2. Алгоритмы методов численных решений ДУ: Метод Эйлера и модифицированный метод Эйлера